



QC  
3  
C59


C-7.1  
5-1

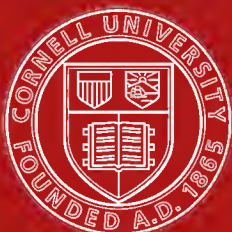
CORNELL  
UNIVERSITY  
LIBRARY



PHYSICS

# The Physical Review.

Cornell University Library  
**QC 3.C59**  
Lectures delivered at the celebration of  
  
3 1924 004 201 657 phys



Cornell University  
Library

The original of this book is in  
the Cornell University Library.

There are no known copyright restrictions in  
the United States on the use of the text.

<http://www.archive.org/details/cu31924004201657>

# LECTURES

DELIVERED AT THE

CELEBRATION OF THE TWENTIETH ANNIVERSARY  
OF THE FOUNDATION OF

CLARK UNIVERSITY

1

UNDER THE AUSPICES OF THE DEPARTMENT  
OF PHYSICS

BY

VITO VOLTERRA

ERNEST RUTHERFORD

ROBERT WILLIAMS WOOD

CARL BARUS

WORCESTER, MASS., SEPTEMBER 7-11, 1909

PUBLISHED BY CLARK UNIVERSITY  
1912

G. E. Stechert & Co.  
151-155 WEST 25TH ST.  
NEW YORK.

KB



## INTRODUCTION

CLARK UNIVERSITY was founded in 1889, chiefly for the purpose of the promotion of scientific research. It accordingly seemed fitting that the twentieth anniversary of its foundation should be celebrated by inviting leading scientists from America and Europe to deliver a set of lectures on subjects in connection with which they had become eminent. The Department of Physics, in accordance with this plan, invited the following gentlemen, who delivered lectures on the subjects mentioned.

VITO VOLTERRA, SC.D., PHYS.D., MATH.D., Professor of Mathematical Physics at the University of Rome, Senator of the Kingdom of Italy, former President of the Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Member of the Società dei Quaranta, etc.: *Sur quelques progrès récents de la physique mathématique.*

ERNEST RUTHERFORD, D.SC., LL.D., F.R.S., Langworthy Professor of Experimental Physics at the University of Manchester, Nobel prizeman in Chemistry: *The History of the Alpha Rays from Radioactive Substances.*

ALBERT A. MICHELSON, SC.D., LL.D., F.R.S., Professor of Physics at the University of Chicago, Rumford medallist, American Academy of Arts and Sciences, Nobel prizeman in Physics, former President American Physical Society: *Recent Advances in Spectroscopy.*

CARL BARUS, PH.D., LL.D., Professor of Physics at Brown University, Rumford medallist, American Academy of Arts and Sciences, former President American Physical Society: *Certain Physical Properties of the Iron Carbides, together with Inferences deducible therefrom.*

ERNEST FOX NICHOLS, D.SC., LL.D., President of Dartmouth College, Rumford medallist, American Academy of Arts and Sciences: *Radiation from Gases heated by Sudden Compression.*

ROBERT WILLIAMS WOOD, Professor of Experimental Physics at the Johns Hopkins University, Rumford medallist,

American Academy of Arts and Sciences: *The Optical Properties of Metallic Vapors*.

The lectures of Professors Michelson and Nichols not being available, the others are published herewith. It is hoped that by their publication the University makes a noteworthy contribution to the Science of Physics.

ARTHUR GORDON WEBSTER.

WORCESTER, MASS.,  
December 19, 1911.



# CONTENTS

	PAGE
VITO VOLTEERRA. SUR QUELQUES PROGRÈS RÉCENTS DE LA PHYSIQUE	
MATHÉMATIQUE	
PREMIÈRE LEÇON . . . . .	1
DEUXIÈME LEÇON . . . . .	28
TROISIÈME LEÇON . . . . .	57
ERNEST RUTHERFORD. HISTORY OF THE ALPHA RAYS FROM RADIO-	
ACTIVE SUBSTANCES . . . . .	83
R. W. WOOD. THE OPTICAL PROPERTIES OF METALLIC VAPORS . .	96
C. BARUS. PHYSICAL PROPERTIES OF THE IRON CARBIDES . . .	128



TROIS LEÇONS  
SUR QUELQUES PROGRÈS RÉCENTS DE LA  
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE  
PAR  
M. VITO VOLTERRA  
SÉNATEUR DU ROYAUME D'ITALIE  
PROFESSEUR DE PHYSIQUE À L'UNIVERSITÉ DE ROME



## PREMIÈRE LEÇON

Introduction. — § I. L'analyse et la physique mathématique. — § II. Comment la théorie de Maxwell des tensions dans un champ électrostatique est renfermée dans la formule qui donne la variation d'une intégrale triple. — § III. Dédution des équations de l'électrodynamique du calcul des variations. — § IV. Intérêt et applications de cette déduction; (a) interprétations mécaniques; (b) transformation des équations de l'électrodynamique; (c) invariants intégraux et théorème de réciprocité; (d) l'action stationnaire et l'action variée en physique mathématique. — § V. Nécessité d'étendre la conception de fonction pour étendre le principe de l'action variée; comment les théories développées dernièrement s'orientent dans cette direction. — § VI. Les caractéristiques et le temps regardé comme une coordonnée. Le monde de Minkowski. — § VII. Interprétation des caractéristiques. Cas du monde à 4, à 3, et à 2 dimensions. Comment le mécanisme des ondes dans le cas des différents mondes isotropes n'est pas le même. Erreurs qui viendraient de l'intuition et de l'analogie. — § VIII. Chocs et calcul des variations. — § IX. Cas des milieux anisotropes. Les milieux biaxiques et uniaxiques. Leur différence par rapport au mécanisme des ondes. — § X. Réduction à des équations symétriques. Introduction des imaginaires en physique mathématique. Principe des images. — § XI. Considérations de Minkowski. La transformation de Lorentz. La contraction de Lorentz. La contemporanéité des événements. Relations avec le principe de l'action stationnaire et avec le calcul des variations.

*Messieurs :*

Permettez-moi, avant d'aborder mon sujet, d'exprimer au corps académique de la Clark University toute ma reconnaissance de l'honneur qu'on m'a fait en m'appellant à exposer quelques points de physique mathématique devant les mathématiciens et les physiciens réunis dans cette circonstance.

Laissez-moi ajouter que je suis heureux de me trouver parmi les savants Américains dont nous, en Europe, admirons les grandes découvertes et les grands travaux scientifiques, qui deviennent de jour en jour plus répandus et plus célèbres.

J'ai vu les beaux programmes des cours de physique mathématique et d'analyse de la Clark University. Il serait inutile de répéter des notions qui ont été déjà exposées d'une manière élevée et systématique, c'est pourquoi je n'envisagerai que l'évolution de quelques idées et je ne toucherai que quelques points qui ont été le but de mes recherches personnelles.

## § I

I. Si vous demandez à tout mathématicien si dans son esprit il fait une distinction entre les théories de l'élasticité et celles de l'électrodynamique, il vous dira qu'il n'en fait pas, car les types des équations différentielles qu'il rencontre, et les méthodes qu'il doit employer pour résoudre les problèmes qui se présentent, sont tout à fait les mêmes dans les deux cas.

D'un autre côté la coïncidence des relations analytiques amené, d'une manière simple et naturelle, au passage de la théorie élastique à la théorie électromagnétique de la lumière et celle-ci, après bien des tâtonnements, a pris, dans le cas des corps en mouvement, la forme désormais classique que Lorentz lui a donnée.

Je n'hésite pas à relier ce mouvement d'idées tout à fait moderne à l'esprit philosophique qui s'est dégagé de la grande œuvre de Lagrange.

Lagrange a ramené la mécanique à une seule formule. De même les fondateurs des théories générales de la physique mathématique, à l'exemple de Fourier, ont fait dépendre les différents phénomènes d'un certain nombre d'équations générales qui renferment tous les cas possibles et ont réduit la plupart des difficultés à des difficultés analytiques.

C'est ainsi, comme on a répété tant de fois, que les sources des plus grandes découvertes de l'analyse ont été les problèmes de la nature. En même temps on peut dire que tout perfectionnement des méthodes de l'analyse a contribué au progrès de la physique mathématique.

Certains esprits ont besoin d'être soutenus dans toute recherche analytique d'une interprétation qui rattache leurs vues à des phénomènes concrets. D'autre part que de résultats que le calcul a guidé d'une manière inconsciente et mécanique et qui sont à peu près muets si on les envisage au point de vue algébrique, deviennent tout-à-coup d'un grand intérêt et prennent une signification inattendue, dès qu'on les interprète par la théorie physique !

## § II

Il ne serait pas nécessaire de donner des exemples pour démontrer la vérité très courante que je viens d'énoncer, mais je ne puis pas me passer de vous exposer un cas typique qui nous

sera utile pour commencer et qui nous amènera en même temps à envisager le calcul des variations dont nous aurons à parler dans cette lecture.

Nous allons voir qu'une conception et une théorie célèbre de Maxwell est renfermée dans l'expression de la variation d'une intégrale triple, pourvu qu'on ait appris à lire ce qu'on trouve caché dans cette formule élémentaire.

Je calcule en effet la variation de l'intégrale triple

$$(1) \quad P = \int_S F\left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, x, y, z\right) dx dy dz,$$

$V$  étant une fonction de  $x, y, z$ . Je suppose que la fonction  $V$  change infiniment peu et je suppose aussi que l'espace  $S$ , limité par un contour  $\sigma$ , se déplace et se déforme infiniment peu.

Pour calculer cette variation il suffit, comme a fait Lagrange en hydrodynamique, d'individualiser les points par des paramètres indépendants de la déformation.

Par des opérations très élémentaires et par des intégrations par parties bien connues on trouve, en groupant les termes d'une manière convenable,

$$\delta P = A_1 + A_2 + A_3,$$

où

$$A_1 = \int_S W_1 \delta V dS - \int_\sigma W_2 \delta V d\sigma,$$

$$A_2 = \int_S (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + M_x p + M_y q + M_z r) dS,$$

$$A_3 = \int_S (t_{11} \gamma_{11} + t_{22} \gamma_{22} + t_{33} \gamma_{33} + t_{23} \gamma_{23} + t_{31} \gamma_{31} + t_{12} \gamma_{12}) dS.$$

J'ai désigné par  $p, q, r$ , les composantes de la rotation de chaque particule du milieu, c'est-à-dire,

$$p = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x} \right), \quad r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y} \right),$$

par  $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$  le *strain* du milieu, c'est-à-dire,

$$\gamma_{11} = \frac{\partial \delta x}{\partial x}, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial \delta z}{\partial z}, \quad \gamma_{23} = \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y},$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}.$$

Les autres quantités se calculent facilement moyennant la fonction  $F$ , et ses dérivées. L'opération que j'ai faite est la plus élémentaire de la théorie des variations.

Voilà maintenant l'énoncé de cette formule :

*La variation de l'intégrale triple peut être regardée comme la somme de trois termes, dont le premier  $A_1$  dépend de la variation de la fonction  $V$ , le second  $A_2$  peut être interprété comme un travail dépensé pour le déplacement et la rotation des particules du milieu, et le troisième  $A_3$  peut être interprété comme un travail dépensé pour la déformation du milieu même.*

Chaque fois que  $A_1$  et  $A_2$  seront nuls  $\delta P$  pourra être égalisé à un travail de forces élastiques et, par suite, l'ensemble des quantités  $t_{11}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{33}$ ,  $t_{23}$ ,  $t_{31}$ ,  $t_{12}$  représentera le *stress*.

Or, si nous supposons que  $P$  soit l'énergie des forces Newtoniennes, par exemple l'énergie électrostatique d'un milieu,  $A_1$ , et  $A_2$  s'annulent. Il suffit pour cela de remplacer  $P$  par l'expression bien connue

$$\int_S V \rho dS - \frac{1}{8\pi} \int_S (\text{Grad. } V)^2 dS,$$

où  $V$  est le potentiel et  $\rho$  la densité de la distribution des masses. Si l'on calcule le stress on trouve le stress de Maxwell, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{1}{8\pi} (\text{Grad. } V)^2 - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2, & t_{23} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z}, \\ t_{22} &= \frac{1}{8\pi} (\text{Grad. } V)^2 - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2, & t_{31} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x}, \\ t_{33} &= \frac{1}{8\pi} (\text{Grad. } V)^2 - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2, & t_{12} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y}. \end{aligned}$$

La formule (1) est beaucoup plus générale, et, comme il est évident, renferme aussi d'autres théories, dont celle de Maxwell n'est qu'un cas particulier.

Mais je ne veux pas pousser plus loin dans cette direction, trop de choses il nous reste à dire où le calcul des variations aura un rôle très grand. Je n'ai touché au sujet précédent que pour donner un exemple qui me semble très suggestif de ce que j'avais dit d'abord d'une manière générale.



## § III

J'ai parlé tout-à-l'heure des méthodes de la mécanique. On doit à Hamilton bien des progrès dans cette branche fondamentale de la physique mathématique. Il me suffit de rappeler que, par le principe de Hamilton, toute question de mécanique, lorsque le potentiel existe, peut se ramener à un problème de calcul des variations. Deux principes ressortent de là : celui de l'action stationnaire et celui de l'action variée. Il n'est pas nécessaire d'insister sur le grand rôle que ce dernier principe a joué dans toutes les recherches successives. Le génie d'un mathématicien tel que Jacobi y a laissé une trace qui ne pourra jamais s'effacer.

Les équations de l'équilibre élastique aussi peuvent se réduire à une question de minimum, en suivant la méthode inaugurée par Green. De même la théorie des vibrations des corps élastiques peut rentrer dans le domaine du calcul des variations, si l'on envisage le potentiel des forces élastiques et la force vive du mouvement vibratoire.

Je vais maintenant examiner la même question dans le cas de l'électrodynamique.

Il y a plusieurs recherches bien connues là-dessus et il y a des cours et des traités classiques (il me suffit de citer celui de Boltzmann), où cette déduction est faite. Dans certains cas particuliers la déduction est presque immédiate. Ce que je désire montrer est que, dans le cas le plus général (je suppose que le milieu soit en repos) on peut arriver au but d'une infinité de manières, c'est-à-dire qu'il y a une grande liberté de choix dans les problèmes de calcul des variations qui peuvent amener aux relations générales qu'on envisage. J'entrerai après, avec quelque détail, sur les applications de cette conception.

Je me limite à montrer une voie qu'on peut tenir.<sup>1</sup> Supposons

$$\begin{aligned}\xi_r &= \frac{d}{dt} \sum_s \epsilon_{rs} X_s - \frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + 4 \pi \sum_h \partial_{rh} X_h, \\ \eta_r &= \frac{d}{dt} \sum_s \mu_{rs} L_s - \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}, \\ u_r &= \frac{d}{dt} \sum_s \epsilon_{rs} Y_s - \frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - 4 \pi \sum_h \partial_{rh} Y_h, \\ v_r &= \frac{d}{dt} \sum_s \mu_{rs} M_s - \frac{\partial Y_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial Y_{r+1}}{\partial x_{r+2}},\end{aligned}$$

où les indices peuvent prendre les valeurs 1, 2, 3, et

$$\epsilon_{rs} = \epsilon_{sr}, \quad \mu_{rs} = \mu_{sr}, \quad \partial_{rs} = \partial_{sr}.$$

Regardons  $x_1, x_2, x_3$ , comme les coordonnées cartésiennes des points d'un espace  $S$  et envisageons les deux intégrales,

$$\int_{t_0}^t dt \int_S \Sigma_r (\xi_r \delta Y_r + y_r \delta M_r) dS, \quad - \int_{t_0}^t dt \int_S \Sigma_r (X_r \delta u_r + L_r \delta v_r) dS.$$

On voit aisément que leur différence dépend des valeurs des fonctions  $X_r, Y_r, L_r, M_r$  aux limites des intégrales.

Supposons

$$a = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \geq 0, \quad b = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \geq 0,$$

où  $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$ ,  $\beta_{rs} = \beta_{sr}$  ( $s, r = 1, 2, 3$ ) sont des fonctions de  $x_1, x_2, x_3$ , et posons

$$a_{rs} = \frac{\partial \log a}{\partial \alpha_{rs}}, \quad b_{rs} = \frac{\partial \log b}{\partial \beta_{rs}},$$

$$\Sigma_s a_{rs} u_s = Z_r, \quad \Sigma_s b_{rs} v_s = N_r.$$

A cause de la propriété précédente

$$\int_{t_0}^t dt \int_S (\Sigma_{rs} a_{rs} X_r \delta Z_s + \beta_{rs} L_r \delta N_s) dS$$

se transformera en

$$- \int_{t_0}^t dt \int_S \Sigma_r (\xi_r \delta Y_r + \eta_r \delta M_r) dS$$

en ajoutant à cette expression des termes qui dépendent des valeurs des fonctions aux limites des intégrales.

Cette relation nous amène tout de suite aux problèmes de calcul des variations que nous cherchons. En effet il suffit de prendre  $Z_r = X_r$ ,  $N_r = L_r$  et l'on déduit que si nous annulons la variation de

$$P = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \int_S \Sigma_{rs} (a_{rs} X_r X_s + \beta_{rs} L_r L_s) dS$$

nous trouverons les équations

$$\xi_r = 0, \quad \eta_r = 0,$$

qui sont les équations de l'électrodynamique pour les corps en repos.

On a donc d'une infinité de manières le moyen de ramener les équations de l'électrodynamique à un problème du calcul

des variations, car les quantités  $\alpha_{rs}$ ,  $\beta_{rs}$  sont tout-à-fait arbitraires.

Je dois ajouter que les moyens que je vous ai montré ne sont pas les seuls, mais qu'il y en a aussi d'autres.

#### § IV

Dans l'histoire des recherches sur les équations de l'électrodynamique cette réduction a un grand intérêt, nous en allons voir des applications.

(a) Il y a d'abord la possibilité de donner des explications mécaniques ou des modèles mécaniques de l'électrodynamique.

En effet par les principes énergétiques la détermination du potentiel cinétique, dans toute question physique, est rattachée à un problème du calcul des variations. Lorsque le potentiel cinétique peut se décomposer en deux termes, dont la différence est l'énergie du système (le premier terme étant un polynome de 2<sup>e</sup> degré des dérivées premières des paramètres qui déterminent l'état du système, tandis que le 2<sup>e</sup> terme est indépendant de ces dérivées); on a tout de suite une interprétation mécanique, car on peut ramener les équations à des équations du type de Lagrange.

Dans notre cas il a une infinité d'interprétations, et cela ne doit pas nous surprendre. Nous savons depuis longtemps, comme M. Poincaré l'a remarqué, que s'il y a une explication mécanique d'un phénomène, il y en a une infinité.

On peut très-bien rattacher aux développements précédents beaucoup de théories, par exemple, celle de Lord Kelvin des milieux gyrostatiques et les théories si célèbres et si importantes de Sir Joseph Larmor.<sup>2</sup>

Tout récemment MM. E. et F. Cosserat ont traité, dans un livre intéressant, des questions qui ont des rapports avec ce que je viens de dire.<sup>3</sup>

(b) Mais laissons de côté ce point de vue et remarquons que la réduction à une question de calcul des variations peut être employée pour des buts analytiques, tels que la transformation des équations en coordonnées curvilignes. Il suffit à cet effet de rappeler la méthode inaugurée par Jacobi pour transformer le paramètre différentiel de 2<sup>e</sup> ordre. C'est par un procédé analogue que plusieurs auteurs ont transformé les équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes et que Beltrami a pu

même se délivrer des conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients du carré de l'élément linéaire lorsque l'espace est euclidien.<sup>4</sup>

On établit ainsi les fondements de l'optique dans les espaces ayant une courbure.

Mais la transformation dont nous venons de parler peut être obtenue aussi par d'autres procédés plus rapides et plus directs, c'est pourquoi je ne pousserai pas plus loin dans cette direction.

(c) Si nous partons des formules que nous avons rappelées tout-à-l'heure,<sup>5</sup> on a, par des calculs très simples, que l'expression

$$\Sigma_i \left( \xi_i \frac{dY_i}{dt} + \eta_i \frac{dM_i}{dt} \right)$$

peut être transformée en une différentielle exacte par rapport à  $t$ , c'est-à-dire en

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \Sigma_{is} (\alpha_{is} X_i X_s + \beta_{is} L_i L_s) - \Sigma_i \left[ L_i \left( \frac{\partial Y_{i+1}}{\partial x_{i+2}} - \frac{\partial Y_{i+2}}{\partial x_{i+1}} \right) - X_i \left( \frac{\partial M_{i+1}}{\partial x_{i+2}} - \frac{\partial M_{i+2}}{\partial x_{i+1}} \right) \right] \right\} + 4 \pi \Sigma_{ih} \partial_{ih} X_h Y_i,$$

et dans la somme de termes qui sont des dérivés par rapport aux coordonnées  $x_1, x_2, x_3$ .

De lors, si les équations  $\xi_i = 0$ ,  $\eta_i = 0$  sont satisfaites, et si les quantités  $X_i, Y_i, L_i, M_i$  à distance infinie deviennent infiniment petites d'un ordre convenable, l'intégrale étendue à tout l'espace de l'expression (2) sera nulle d'où l'on trouve, en intégrant par rapport à  $t$

$$\frac{1}{2} \int \left\{ \Sigma_{is} (\alpha_{is} X_i X_s + \beta_{is} Y_i Y_s) - \Sigma_i \left[ L_i \left( \frac{\partial Y_{i+1}}{\partial x_{i+2}} - \frac{\partial Y_{i+2}}{\partial x_{i+1}} \right) - X_i \left( \frac{\partial M_{i+1}}{\partial x_{i+2}} - \frac{\partial M_{i+2}}{\partial x_{i+1}} \right) + 4 \pi \Sigma_{ih} \partial_{ih} X_h Y_i \right] \right\} dS = \text{const.},$$

où l'intégrale est étendue à tout l'espace.

Nous sommes donc parvenus à un invariant intégral. Mais il y a une autre relation, même plus intéressante encore, qu'on peut établir par les mêmes procédés.

Nous aurons l'occasion de parler dans la leçon suivante de l'évolution du théorème de Green.

Cette remarquable proposition, qui a été la base la plus féconde des développements analytiques de presque toutes les

branches de la physique mathématique, consiste dans une relation réciproque entre deux solutions du même système d'équations différentielles. J'ai montré autrefois que toutes les équations qui dépendent des problèmes du calcul des variations peuvent amener à un théorème de réciprocité qui correspond au théorème de Green. Je vais l'obtenir effectivement dans notre cas. Il suffit d'envisager deux systèmes de valeurs des quantités  $X_i, Y_i, L_i, M_i, \xi_i, \eta_i, u_i$ , et de les distinguer en leur apposant un ou deux suffixes. Si l'on emploie les même transformation dont nous avons déjà fait usage, on trouve que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_S [\Sigma_i \epsilon_{is} (X_s' Y_i'' - X_s'' Y_i') + \mu_{is} (L_s' M_i'' - L_s'' M_i')] dS \\ &= \int_{\sigma} (Y_{i+1}'' L_{i+2}' - Y_{i+2}'' L_{i+1}' - Y_{i+1}' L_{i+2}'' + Y_{i+2}' L_{i+1}'' \\ & \quad - M_{i+1}'' X_{i+2}' + M_{i+2}'' X_{i+1}' + M_{i+1}' X_{i+2}'' - M_{i+2}' X_{i+1}'') \\ & \quad \cos (nx_i) d\sigma, \end{aligned}$$

où  $\sigma$  est le contour d'un espace  $S$  et  $n$  la normale au contour dirigée vers la région extérieure. Cette relation est justement la relation réciproque que nous avons en vue. On peut la comparer avec celle qu'on a dans le cas de l'élasticité, qui a été donnée par Betti comme une extension de la formule de Green et dont nous parlerons dans la leçon suivante.

Nous allons toucher maintenant à un point très délicat et qui, à mon avis, présente beaucoup d'intérêt, car un domaine de recherches tout-à-fait nouvelles peuvent s'y rattacher.

Revenons une fois encore à la mécanique et au principe de Hamilton, et rappelons la question à laquelle il amène. On a une intégrale  $P = \int_{t_0}^t f(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, t) dt$ , où paraissent les fonctions  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de la variable  $t$  qui sont les coordonnées du système. Il faut annuler la variation de  $P$  en supposant de donner des variations infiniment petites aux fonctions  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . On trouve des équations ordinaires du deuxième ordre, auxquelles  $x_1, x_2, \dots, x_n$  doivent satisfaire. Supposons que les constantes arbitraires soient déterminées, dès que l'on donne les valeurs des fonctions  $x_1, x_2, \dots, x_n$  aux limites  $t_0$  et  $t_1$ .

Regardons  $P$  comme une fonction des valeurs de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , à la limite supérieure de l'intégrale. On trouvera une fonction de  $n$  variables. La théorie de Hamilton et de Jacobi que

Clebsch, Mayer et bien d'autres, ont perfectionnée, est bâtie sur la recherche des relations qui passent entre cette fonction de plusieurs variables et les intégrales des équations différentielles qui correspondent au problème de calcul des variations, et entre ces intégrales et l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire cette fonction de plusieurs variables.

Cela posé, rappelons les questions de physique mathématique que nous avons envisagées. Qu'est ce qu'il y a de changé?

Tout peut se réduire aussi à des questions du calcul des variations, mais ce n'est plus avec un nombre fini de variables que l'on a à faire, comme dans la mécanique classique, où le nombre des coordonnées du système est fini. Il faut au contraire envisager un ensemble continu de variables. En effet le milieu où le phénomène se produit est un milieu continu et à chaque point du milieu correspondent des paramètres qui individualisent l'état physique de ce point, de même que, en mécanique, les coordonnées caractérisent les positions des différents points en mouvement.

Si nous revenons sur les formules que nous avons rencontrées nous remarquerons que nous avons dans les questions de physique mathématique des intégrales qui remplacent les sommes qui paraissent dans celles de la mécanique ordinaire.

D'autre part l'extension s'impose et l'on voit bien qu'on a devant soi un nouveau champ de recherches dont le modèle est donné par la théorie Jacobi-Hamilton en mécanique, et dont chaque résultat analytique à une interprétation physique.

## § V

Nous allons voir quelles sont les difficultés qu'on rencontre si l'on prend cette voie. Nous envisagerons une question même plus générale que celle qu'on trouverait par l'extension dont nous venons de parler.<sup>6</sup>

Dans les intégrales simples il y a les deux limites de l'intégrale, mais lorsqu'on passe aux intégrales doubles les limites sont formées par des lignes, et, lorsqu'on arrive à des intégrales multiples avec un nombre plus grand encore de variables, le champ d'intégration est limité par des surfaces où des espaces à plusieurs dimensions.

Dans le cas des intégrales simples on a les valeurs d'un certain nombre de paramètres aux limites de l'intégrale, et l'intégrale même doit être regardée comme une fonction de ces

valeurs. Dans le cas des intégrales multiples on a les valeurs de certaines fonctions à la frontière du domaine d'intégration, et l'on doit régarder l'intégrale comme une quantité qui dépend de toutes les valeurs de ces fonctions sur la frontière. Le type de dépendance change donc d'une manière complète et l'on rencontre évidemment des relations qui ont une signification tout-à-fait nouvelle, en dehors de celles ordinaires qui individualisent les rapports entre fonctions et variables.

Mais j'ajouterai qu'il est nécessaire de franchir ce pas et que l'on est forcé d'accepter ces idées, c'est-à-dire d'étendre l'idée ordinaire de fonction, si l'on ne veut renoncer à jamais à transporter dans la physique mathématique, d'une manière nette et rigoureuse, les conceptions les plus fécondes et les plus générales de la mécanique.

Dans la direction vers laquelle il faut marcher on est jusqu'à présent peu avancé. Mais les pas qu'on a fait dans ces derniers temps annoncent que la voie va être bientôt parcourue.

Permettez-moi de rappeler que, depuis longtemps, j'ai introduit l'idée des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction, ou de la forme d'une ligne ou d'une surface, et que j'ai tâché d'en donner en général le développement analytique, qui n'est au fond qu'une extension du développement d'une fonction analytique.<sup>7</sup>

Nous aurons l'occasion de revenir là-dessus dans la dernière leçon. Une intégrale définie  $\phi(x) = \int_a^b f(\xi) F(x, \xi) d\xi$ , où, sous le signe d'intégration, paraît  $f(\xi)$  donne une dépendance linéaire entre la fonction  $f(\xi)$  et la fonction  $\phi(x)$  et correspond au cas des fonctions de premier degré.

Les problèmes de l'inversion des intégrales définies, ou, comme on les a appelés plus tard, les problèmes de la résolution des équations intégrales linéaires, correspondent à la résolution algébrique des systèmes du premier degré.

Je suis parti en effet de la considération qu'une équation intégrale est le cas limite d'un système d'équations de premier degré avec un nombre infini d'inconnues, et j'ai obtenu la solution dans le cas où le déterminant infini qui constitue le dénominateur est égal à l'unité. M. Fredholm a donné après la solution lorsque le déterminant infini qui est au dénominateur est quelconque. Moi et M. Schmidt nous avons envisagé aussi des cas où l'équation intégrale n'est pas linéaire.

Tout cela n'est autre chose que la résolution algébrique des équations de premier degré, ou de degré supérieur, transportée du cas d'un nombre fini à celui d'un nombre infini de variables.

Plus récemment encore, comme nous verrons, M. Hadamard a envisagé le cas d'une fonction de Green qui dépend du contour du domaine auquel elle se rapporte et a tâché d'étudier la question des maxima d'une quantité qui dépend d'une surface.<sup>8</sup>

La question que j'ai posée tout-à-l'heure de l'extension de la théorie Jacobi-Hamilton va beaucoup au delà de ces recherches. Entre ces recherches et l'extension dont je viens de parler il y a le même rapport qui passe entre la résolution algébrique des équations et l'étude des équations différentielles.

Beaucoup de chemin il y a à faire, mais les mêmes principes généraux qui ont amené à établir les fondements de la résolution des équations intégrales servent aussi dans ce cas beaucoup plus compliqué. C'est toujours le passage du fini à l'infini dans le nombre des variables indépendantes qui donne la clef pour la résolution des différentes questions. Je désire, avant de laisser ce sujet, donner le type des résultats qu'on trouve lorsque l'on cherche à étendre la théorie de Jacobi-Hamilton à un cas particulier d'intégrales doubles.<sup>9</sup>

Les équations différentielles

$$(3) \quad \frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{i,s}}, \quad \sum \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

ont une forme qui présente des analogies avec les équations canoniques de la mécanique et on peut très aisément les déduire en cherchant à annuler la variation de l'intégrale

$$\iint \left( \sum p_{ih} \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)} - H \right) du dv.$$

Soient maintenant  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  trois fonctions de  $x_1, x_2, x_3$  telles que

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_3} = 0.$$

L'intégrale

$$W = \int_{\sigma} (\pi_1 dx_2 dx_3 + \pi_2 dx_3 dx_1 + \pi_3 dx_1 dx_2)$$

étendue à une surface dépend seulement de la ligne  $s$  qui forme le contour de  $\sigma$ . Je l'appelle une fonction de premier degré de la ligne  $s$ , et j'écris



$$\pi_1 = \frac{dW}{d(x_2, x_3)}, \quad \pi_2 = \frac{dW}{d(x_3, x_1)}, \quad \pi_3 = \frac{dW}{d(x_1, x_2)}.$$

Entre les équations (3) et l'équation

$$(4) \quad H\left(\frac{dW}{d(x_2, x_3)}, \frac{dW}{d(x_3, x_1)}, \frac{dW}{d(x_1, x_2)}, x_1, x_2, x_3\right) + h = 0,$$

où l'on a remplacé  $p_{23}, p_{31}, p_{12}$  par

$$\frac{dW}{d(x_2, x_3)}, \frac{dW}{d(x_3, x_1)}, \frac{dW}{d(x_1, x_2)},$$

passent les mêmes relations que Jacobi a découvert entre les équations canoniques et son équation aux dérivées partielles. Nous voyons que, par la proposition que je viens d'envisager, on a fait un pas : les équations canoniques ont été remplacées par des équations aux dérivées partielles (les équations (3)) et l'équation aux dérivées partielles de Jacobi a été remplacée par une équation d'un type tout-à-fait nouveau, c'est-à-dire l'équation (4). Je renvoie, pour des développements, aux beaux travaux de M. Fréchet qui a généralisé et développé ces idées dans quelques mémoires intéressants.

## § VI

Les différentes questions que nous avons traitées rentrent dans le chapitre général de la théorie des ondes. Or il faut remarquer que, dans une autre direction, c'est la considération des caractéristiques qui a renouvelé cette théorie. On n'aurait pu les considérer si on n'avait pensé à régarder le temps comme une coordonnée. En Europe le roman de M. Wells, "Le voyage dans le temps," est très populaire ; je crois qu'ici il le sera autant. Il me faudrait répéter ses paroles si je voulais insister sur cette conception très élémentaire. Minkowski tout récemment y est revenu dans un beau et profond mémoire et dans une leçon populaire qui a montré sous un nouveau jour les idées de M. Lorentz et celles de M. Einstein sur les rapports entre l'espace et le temps.<sup>10</sup>

Il n'est pas possible de séparer la conception du temps de celle de l'espace et réciproquement. Un lieu est toujours observé dans un certain temps et un temps est déterminé toujours dans un certain lieu. Si l'espace est rapporté à des coordonnées  $x, y, z$  et on appelle  $t$  le temps, un point de l'espace envisagé dans un certain temps est individualisé par l'ensemble

des valeurs  $x, y, z, t$ , c'est ce que Minkowski appelle un *point du monde*. L'ensemble de toutes les valeurs possibles de  $x, y, z, t$  est le *monde entier*. Ce que nous observons dans l'espace à trois dimensions n'est qu'une ombre ou une projection d'un espace avec une dimension de plus.

Voilà une difficulté. Si l'on veut embrasser le monde entier il faut envisager un espace à quatre dimensions. Mais on peut éliminer cette difficulté par un procédé bien connu. Il suffit de retrancher une dimension à l'espace ordinaire et imaginer un être infiniment plat qui habite un espace à deux dimensions. Helmholtz et Clifford nous ont habitués à ces conceptions et ils ont ainsi popularisé des idées mêmes plus difficiles et plus compliquées : celles de la courbure de l'espace. Il est évident que pour un être à deux dimensions le monde de Minkowski est à trois dimensions et si l'on simplifie encore et l'on envisage l'être vermiforme de Clifford, c'est-à-dire un être ayant une seule dimension, le monde de Minkowski, pour ce dernier être, est à deux dimensions.

Pour l'être infiniment plat le monde sera représenté dans l'espace  $x, y, t$ . Qu'est-ce-que verra l'observateur de Minkowski s'il-y a un point en répos?

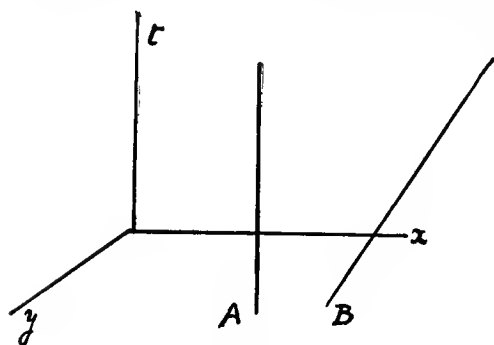


FIG. 1.

ski s'il-y a un point en répos?

Evidemment il verra une ligne parallèle à l'axe  $t$ . Au contraire, si le point  $B$  a un mouvement uniforme il verra une ligne droite inclinée sur l'axe  $t$ . L'ombre ou la projection du point en mouvement

sera obtenue si l'observateur se meut uniformément avec le plan  $x, y$  dans la direction de l'axe  $t$ . Les différents points  $x, y$ , où la ligne inclinée rencontre le plan, nous montrent le mouvement du point  $B$ .

## § VII

Cela posé nous voulons passer à la théorie des ondes pour les milieux en repos. Nous allons rencontrer de nouvelles difficultés et il faut dire dès le premier abord qu'il serait facile de tomber en erreur en se laissant transporter par la simple intuition.

En effet les mécanismes des ondes dans les milieux élastiques à deux ou à trois dimensions sont très différents, de sorte que si l'on fait la théorie de la propagation d'une onde circulaire pour l'être plat on ne fait pas une théorie comparable avec la propagation d'une onde sphérique pour l'être à trois dimensions.<sup>11</sup> Pour nous expliquer d'une manière plus claire, l'être plat a perdu une dimension sur nous qui avons trois dimensions, mais, par contre-coup, il a perdu aussi de simplicité dans le mécanisme de la propagation des ondes.

C'est une circonstance qui constitue évidemment une difficulté, mais il est impossible de s'en passer parce que la nature est ainsi.

Cette circonstance est bien singulière, car il arrive très rarement qu'en retranchant une dimension les choses se compliquent.

Si l'on voulait retrouver la même simplicité qu'on a pour les ondes dans les espaces à trois dimensions, il faudrait laisser de côté l'être plat et passer aux ondes pour l'être vermiforme ou à une seule dimension, pour lequel le monde de Minkowski est à deux dimensions.

En un mot, le mécanisme de la propagation des ondes dans les espaces ayant un nombre impair de dimensions est plus simple que dans ceux qui en ont un nombre pair.

Voyons maintenant les choses de plus près. Envisageons le monde de l'être vermiforme. C'est le plan  $x, t$ .

Si  $A$  est un centre d'ébranlement dans un milieu isotrope et la vitesse de propagation des ondes est l'unité, menons par  $A$  les lignes droites inclinées de  $45^\circ$  sur les axes du côté positif de l'axe  $t$ .

Pour l'observateur de Minkowski chaque ébranlement se propa-

gera le long des deux lignes droites que nous avons menées, et, en dehors d'elles, il n'y aura pas d'ébranlement dans son monde.

Au point de vue analytique les lignes droites que nous avons menées sont les caractéristiques de l'équation différentielle de

d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

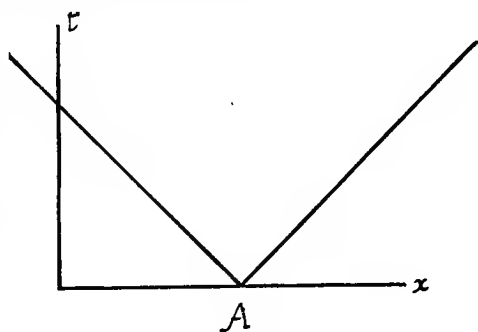


FIG. 2.

Si nous déplaçons d'une manière uniforme l'axe  $x$  dans la direction  $t$  les deux points où les caractéristiques rencontrent cet axe désignent les points qui sont successivement ébranlés.

Revenons à l'être plat, dont le monde de Minkowski est

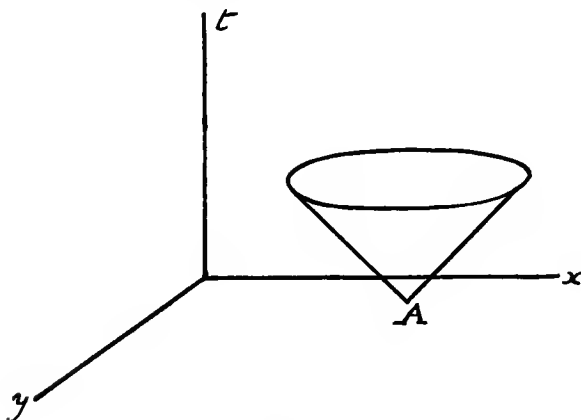


FIG. 3.

l'espace  $x, y, t$ . Soit  $A$  un centre d'ébranlement dans un milieu isotrope, la vitesse de propagation étant l'unité.

Menons du côté positif de l'axe  $t$  le cône ayant  $A$  pour sommet et ayant les génératrices inclinées de  $45^\circ$  sur l'axe  $t$ .

Par analogie et par intuition on serait amené à imaginer que pour l'observateur de Minkowski chaque ébranlement se propagera le long de la surface du cône et, en dehors de cette surface, il n'y aura pas d'ébranlement dans son monde. Mais les choses ne se passent pas ainsi. L'ébranlement remplit tout l'intérieur du cône et à l'extérieur il n'y a pas d'ébranlement.

C'est en cela que consiste la complication plus grande du mécanisme dans ce cas, par rapport au cas que nous avons considéré précédemment.

Si nous voulions passer au cas successif qui se rapporte aux êtres à trois dimensions il suffirait revenir à ce qui arriverait si la surface du cône était la seule partie du monde où il y aurait ébranlement et, par l'imagination, augmenter une dimension en plus. Pour distinguer les deux différentes manières de propagation des ondes que nous avons trouvées, nous les désignerons par le mots *onde sans résidu* et *onde avec résidu*. Le cône que nous avons considéré tout à l'heure est la surface caractéristique de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Le cône qu'on trouverait dans le cas successif où, par notre imagination, nous avons augmenté une dimension, serait l'hyper-surface caractéristique de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

## § VIII

Les lignes et les surfaces caractéristiques, que nous avons considérées tout à l'heure, jouent un rôle dans la théorie des chocs ou de la propagation des discontinuités. Je laisserai de côté les théories générales qui ont été développées par Hugoniot, Christoffel, Hadamard dans le cas de l'hydrodynamique et de l'élasticité et je me bornerai à établir une relation très simple qui passe entre le calcul des variations, la propagation des discontinuités et les surfaces caractéristiques.<sup>12</sup>

J'envisage le cas très simple de l'équation  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , qui correspond aux vibrations d'une membrane. Le problème du calcul des variations, dont elle dépend, consiste à annuler la variation de l'intégrale

$$V = \iiint \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy dt.$$

Supposons maintenant qu'il-y-ait des surfaces à l'intérieur de l'espace  $x, y, t$ , où,  $u$  étant continue, ses dérivées peuvent être discontinues.

On peut se demander : Quelles seront les surfaces où les dérivées pourront être discontinues en sorte que la variation de  $V$  soit toujours nulle ? A quelles conditions devront satisfaire les valeurs des dérivées des deux côtés des surfaces de discontinuité ?

La question ne présente pas de difficulté et l'on trouve que les surfaces doivent être des enveloppes des cônes caractéristiques.

## § IX

Ce que nous avons dit sur les ondes se rapporte aux milieux isotropes. Les difficultés deviennent énormément plus grandes lorsque l'on envisage des ondes dans les milieux anisotropes.

La raison consiste en cela que la théorie du centre d'ébranlement, que nous avons esquissée pour les milieux isotropes, manque lorsque l'on passe aux milieux anisotropes biaxiales. Il est bien curieux de suivre ce que Lamé a fait là-dessus. Ses résultats analytiquement exacts ne peuvent pas donner la théorie du centre d'ébranlement à cause des singularités de sa solution. En effet, supposons de prendre les formules que Lamé a donné pour le centre d'ébranlement correspondant à un certain point, et menons par ce point les axes optiques.<sup>13</sup>

Les composantes des déplacements sont infinies le long des deux droites et, en tournant autour de ces droites, les déplacements sont polydromes, c'est-à-dire, si l'on part de certains points avec une valeur d'une des composantes du déplacement et, en prenant les valeurs qui se suivent avec continuité, l'on tourne autour de l'axe optique, en revenant au point de départ, on trouve une valeur différente pour la même composante du déplacement.<sup>14</sup> Il faudrait donc supposer que le milieu fut sectionné le long de deux régions planes comprises entre les axes optiques, de manière que les particules du milieu qui se trouvent des deux côtés de ces régions pussent vibrer d'une manière indépendante l'une de l'autre. Cela ne correspond pas évidemment à l'idée que nous nous faisons du milieu, qui est celle d'un milieu continu.

Lamé a tâché de démontrer que ces formules sont les seules qui peuvent correspondre à un centre d'ébranlement dans un milieu biréfringent, c'est pourquoi on serait amené à la conclusion qu'il n'est pas possible de trouver un centre lumineux dans un tel milieu.

Il est évident que tout cela n'est pas exact, mais il faut interpréter les résultats analytiques pour bien comprendre d'où sort la contradiction.

Commençons par spécialiser les formules de Lamé au cas où le milieu est uniaxique. On trouve des solutions qui deviennent infinies tout le long de l'axe optique. Voilà une singularité qui n'est pas compatible avec l'existence d'un seul centre d'ébranlement, mais poussons les choses davantage et spécialisons au cas du milieu isotrope. La singularité des déplacements, qui consiste dans le fait qu'ils deviennent infinis le long d'une droite, subsiste encore. Il ne pourrait donc exister un centre lumineux dans un milieu isotrope! Cela évidemment renferme une contradiction, et d'autre part depuis Euler nous

savons que par les dérivés de la fonction  $\frac{f(r+t)}{r}$ , où  $r$  représente la distance du centre d'ébranlement on peut calculer les composantes des vibrations sans aucune singularité, excepté dans le centre même. L'interprétation que Lamé a donné à ses formules renferme donc une erreur initiale. Voilà en quoi elle consiste. Lamé ne soupçonnait pas que le mécanisme des ondes pouvait être de telle nature que l'onde avait un résidu, c'est-à-dire, il ne soupçonnait d'autre mécanisme que celui que nous avons vu qui a lieu pour les milieux isotropes ayant un nombre impair de dimensions. C'est pourquoi il donnait du premier abord à ses formules une forme qui correspondait au mécanisme où il n'y a pas de résidu, et cela devait nécessairement l'amener à une erreur. Ce que nous pouvons en tirer à présent, est que le mécanisme des ondes dans le cas des milieux à trois dimensions biréfringents biaxiques doit se rapprocher au mécanisme des ondes avec résidu et non au mécanisme des ondes sans résidu.

Excepté la critique négative des résultats de Lamé que nous avons exposée on n'est guère avancé plus que lui, car les formules pour le centre lumineux dans les milieux anisotropes biaxiques manquent encore. Il faut se rappeler que la surface de l'onde de Fresnel n'a pas été trouvée comme conséquence des vibrations émanantes d'un centre d'ébranlement, mais on l'a déduite de la propagation par ondes planes et par l'enveloppe de ces ondes. Le pas à faire est donc grand et difficile et j'aime à le signaler parce qu'il serait bien intéressant de le faire.

Une nouvelle branche de l'optique serait rattachée à la solution de cette question.

Ce qu'on peut ajouter est que pour le milieu anisotrope uniaxique on peut résoudre le problème.

Je vais en indiquer la voie en peu de mots.

Les équations de la lumière pour les milieux anisotropes sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial W}{\partial y} - b^2 \frac{\partial V}{\partial z}, & U &= \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial U}{\partial z} - c^2 \frac{\partial W}{\partial x}, & V &= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial V}{\partial x} - a^2 \frac{\partial U}{\partial y}, & W &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad \text{où}$$

On peut faire dépendre les trois équations d'une seule à laquelle on peut donner une forme tout-à-fait symétrique. Si nous posons

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} = A_1, \quad \frac{c^2 + a^2}{ca} = A_2, \quad \frac{a^2 + b^2}{ab} = A_3,$$

$$t = x_1 \sqrt{-1}, \quad \frac{x}{\sqrt{bc}} = x_2, \quad \frac{y}{\sqrt{ca}} = x_3, \quad \frac{z}{\sqrt{ab}} = x_4,$$

cette équation est la suivante

$$\begin{aligned} \Omega f = & \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_4^4} + A_1 \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_4^2} \right) \\ & + A_2 \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_4^2} \right) + A_3 \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Les composantes du déplacement  $u, v, w$  doivent satisfaire les équations  $\Omega u = 0, \Omega v = 0, \Omega w = 0$ , et, réciproquement, toutes les intégrales des équations de l'optique peuvent s'écrire sous la forme

$$u = \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 F_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left( a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z} \right),$$

$$v = \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} - b^2 \Delta^2 F_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z} \right),$$

$$w = \frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2} - c^2 \Delta^2 F_3 + \frac{\partial}{\partial z} \left( a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z} \right),$$

où

$$F_1 = \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y}, \quad F_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad F_3 = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

$f_1, f_2, f_3$  étant trois intégrales de l'équation  $\Omega f = 0$ .

Or, si nous supposons que le milieu soit uniaxique, c'est-à-dire  $b = c$ , l'équation  $\Omega f = 0$  se décompose en une double équation du type de l'équation de Laplace, d'où l'on peut passer au potentiel retardé, c'est pourquoi la solution du centre lumineux, dans ce cas, peut s'obtenir sans difficulté. On peut comparer cette décomposition avec la décomposition de la surface de l'onde.<sup>15</sup>

## § X

Dans le cours des considérations précédentes nous avons eu l'occasion de remplacer  $t$  par  $\sqrt{-1} x$  et nous avons ainsi intro-



duit dans les équations une symétrie qu'on n'avait pas d'abord. Puisque l'occasion s'en présente nous dirons un mot par rapport à l'introduction des imaginaires en physique mathématique, sans entrer dans aucun détail sur une question qui nous pourrait entraîner trop loin.

Il n'est pas nécessaire d'arriver jusqu'aux vibrations dans les milieux anisotropes pour trouver un résultat pareil à celui que nous avons indiqué. L'équation de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$  se transforme dans l'équation

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

en remplaçant  $z$  par  $it$ .

Dans la théorie même du potentiel il est utile, quelque fois, de remplacer des masses réelles par des masses situées dans des points imaginaires et ayant le même potentiel.<sup>16</sup>

Soit  $A$  un point quelconque et  $\alpha$  un plan quelconque, on peut trouver des masses  $m$  et une double couche  $\mu$  située en des régions imaginaires de  $\alpha$  ayant le même potentiel que la masse unité située dans le point  $A$ .

$V$  étant la fonction potentielle due à des masses  $M$ , on aura donc, par le théorème de Gauss, que la valeur de  $V$  au point  $A$  égalera le potentiel des masses  $M$  sur les masses  $m$  et sur le double couche  $\mu$ .

C'est ainsi qu'en connaissant  $V$  et la dérivée normale de  $V$  sur  $\alpha$ , on peut avoir la valeur de  $V$  au point  $A$ , et que l'on peut calculer l'intégrale générale de l'équation de Laplace, d'où l'on tire l'intégrale générale de l'équation (5).

On peut aussi, par un procédé analogue, calculer un potentiel symétrique, quand on connaît ses valeurs sur l'axe de symétrie sans recourir à des développements en série. Un résultat in-

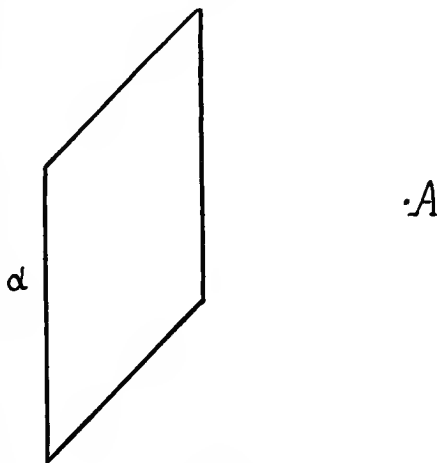


FIG. 4.

téressant se trouve en transportant le principe des images de l'équation de Laplace à l'équation (5).

Il suffit de remplacer la métrique individualisée par l'élément linéaire

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

dans la métrique individualisée par l'élément linéaire

$$dt^2 - dx^2 - dy^2.$$

Les images relatives à des sphères deviennent des images par rapport à des hyperboloides équilatères et l'on peut bâtir là-dessus une théorie par rapport aux ondes.<sup>17</sup>

## § XI

On doit à Minkowski une transformation des équations de Lorentz de l'électrodynamique où, en remplaçant  $it$  par  $x_4$ , on donne une forme symétrique aux huit équations fondamentales.<sup>18</sup>

C'est par là qu'il trouve le théorème de relativité de Lorentz, et, ce sont ces considérations, la base analytique de ses profondes vues sur l'espace et le temps.

Nous ne le suivrons pas dans la voie analytique. Nous tâcherons de donner le fondement de ses idées par une exposition presque intuitive et dans une forme très élémentaire et nous suivrons pour cela les lignes générales d'une conférence que mon collègue M. Castelnuovo a tenue dernièrement à Rome.

C'est pourquoi nous allons reprendre les considérations que nous avons abandonnées tout-à-l'heure et qui nous seront maintenant très utiles.

Envisageant l'être vermiculaire, dont le monde à deux dimensions est le plan  $xt$ , quelle transformation faudrait-il faire si l'observateur même est en mouvement avec une vitesse uniforme, et s'il veut étudier le mouvement relatif?

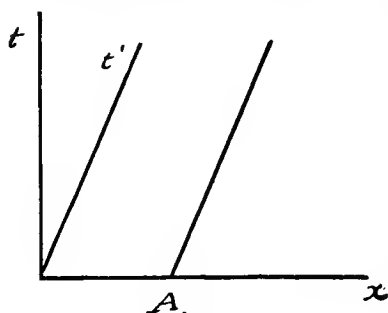


FIG. 5.

Il suffira évidemment, selon les principes newtoniens, de changer l'axe  $t$  dans un axe incliné  $t'$  en gardant toujours le même axe  $x$ . En effet, tout point  $A$  qui a la même vitesse

uniforme sera représenté par une parallèle à  $t'$  et, par suite, apparaîtra en repos. D'autre part les équations de la mécanique newtonienne ne changent pas en changeant les coordonnées  $x, t$  en  $x - at, t$ , ce qui correspond, selon les principes de la géométrie analytique, à changer les axes  $x, t$  dans les axes  $x, t'$ .

Nous pouvons donc énoncer : "le principe newtonien de relativité consiste dans la possibilité de changer les axes  $x, t$  en  $x, t'$  sans changer l'expression des lois mécaniques." Ceci dans le cas du monde de Minkowski à deux dimensions. Dans le cas du monde de Minkowski à quatre dimensions la même loi s'énonce en disant qu'on peut changer les axes  $x, y, z, t$  en  $x, y, z, t'$ , c'est-à-dire que les équations de la mécanique newtonienne ne changent pas par le groupe de transformations  $x - at, y - bt, z - ct, t$ , ou  $a, b, c$  désignent trois constantes quelconques.

Nous allons passer maintenant à la propagation de la lumière. Supposons que la vitesse de la lumière soit l'unité. Conduisons les caractéristiques, dont nous avons parlé tout-à-l'heure, c'est-à-dire les bisectrices  $i, j$  des axes  $x, t$  menées par l'origine, et posons le postulat que la vitesse de la lumière ne doit pas changer quelque soit la système auquel on se rapporte.

Il est évident que ce postulat est en contradiction avec le principe de relativité newtonien, car  $i, j$  n'étant plus les bisectrices des axes  $x, t'$  la vitesse de la lumière par rapport au nouveau système sera changée.

Comment faut-il donc changer le principe de relativité newtonien pour se débarrasser de cette contradiction ?

On voit tout-de-suite qu'en changeant l'axe  $t$  en  $t'$  il faudra changer aussi l'axe  $x$  en  $x'$ , de sorte que les droites  $i, j$  aient toujours pour équations  $x' = \pm t'$ . De même, considérons l'être plat et le monde de Minkowski à trois dimensions. Conduisons le cône caractéristique ayant pour équation  $x^2 + y^2 - t^2 = 0$ . En changeant l'axe  $t$  en  $t'$ , intérieur au cône, il faudra changer aussi les axes  $x$  et  $y$  en  $x'$  et  $y'$  de manière que l'équation du cône par rapport aux nouveaux axes soit toujours

$$x'^2 + y'^2 - t'^2 = 0.$$

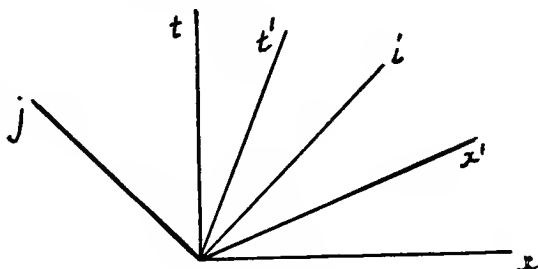


FIG. 6.

Enfin si nous passons aux êtres à trois dimensions, dont le monde est à quatre dimensions, il suffira de changer les coordonnées et le temps de manière que l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

se transforme en  $x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = 0$ .

Nous remplacerons donc le groupe de transformations newtonien dans un groupe de transformations qui ramène l'expression quadratique  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$  en soi-même. Ce groupe est

celui qui ne change pas les équations de Lorentz.

Revenons au cas plus simple. Menons les hyperboles ayant pour équations  $x^2 - t^2 = \pm 1$ . Les unités de longueur correspondantes aux divers espaces  $x, x'$  seront les segments compris entre l'origine et la

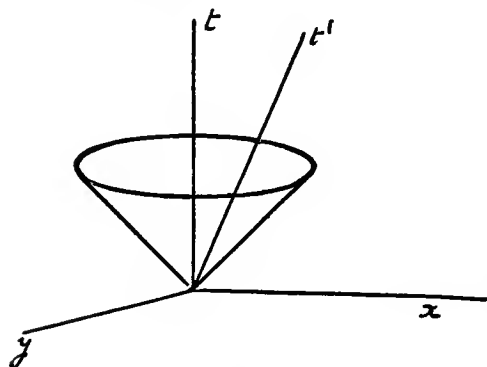


FIG. 7.

courbe, c'est-à-dire  $OX, OX' \dots$ . Envisageons maintenant deux segments  $AB, CD$  de l'axe  $x$ , dont le premier soit en repos.

Il sera représenté par une bande parallèle à l'axe  $t$ . Le second soit en mouvement uniforme, c'est pourquoi il sera représenté par une bande inclinée. Pour comparer les longueurs il faut imaginer deux observateurs dont chacun soit en repos relativement au segment qu'il mesure.

Pour le premier observateur l'axe des temps est  $t$ , l'axe des espaces est  $x$ , l'unité de longueur  $OX$ ; c'est pourquoi le résultat de sa mesure sera

$$\frac{AB}{OX}.$$

Pour le second observateur l'axe des temps sera  $t'$  parallèle

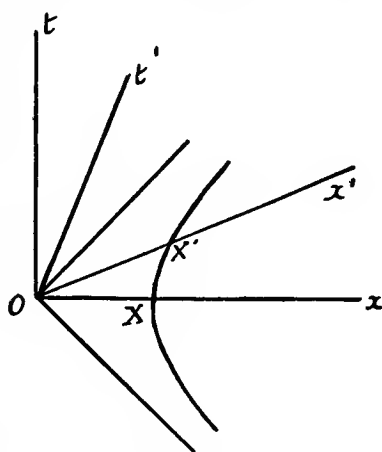


FIG. 8.

à la bande  $CD$ , l'axe des espaces  $x'$  et l'unité de longueur  $OX'$ . Donc le résultat de sa mesure sera

$$\frac{C'D'}{OX'}.$$

Les deux segments seront égaux si

$$\frac{AB}{OX} = \frac{C'D'}{OX'}.$$

Mais, si c'était le premier observateur qui eut fait les deux mesures, il aurait trouvé le rapport des deux segments donné par

$$\frac{CD}{AB}$$

Or, si l'égalité précédente est satisfaite, on trouve facilement

$$\frac{CD}{AB} = \sqrt{1 - a^2},$$

$a$  étant la vitesse du mouvement du segment, d'où l'on tire, comme conséquence, la contraction de Lorentz pour les corps en mouvement.

Nous avons été amenés par les considérations précédentes à la question de la contemporanéité des événements. Soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , des points en mouvement uniforme le long d'une droite  $x$ .

Les images, selon Minkowski, dans le monde à deux dimensions, seront des droites  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Menons les caractéristiques  $i$ ,  $j$ , qui représentent la propagation de la lumière. Supposons que chaque observateur possède une horloge ayant une allure uniforme. Pour régler les horloges prenons comme étalon celui de l'observateur  $A$ . Lorsqu'il se trouve en  $A_0$ , à l'instant  $t_0$ , il fait un signalement lumineux, qui frappe le second observateur lorsqu'il se trouve en  $B$ . On réfléchit le signalement au premier observateur, qui le reçoit lorsqu'il se trouve en  $A$  au temps  $t_1$ . Les droites  $A_0B$  et  $BA_1$  seront respectivement parallèles à  $i$  et  $j$ .

On fait la convention qu'à l'instant où le second observateur a reçu le signalement l'horloge de  $B$  doit marquer le temps  $(t_0 + t_1) / 2$ .

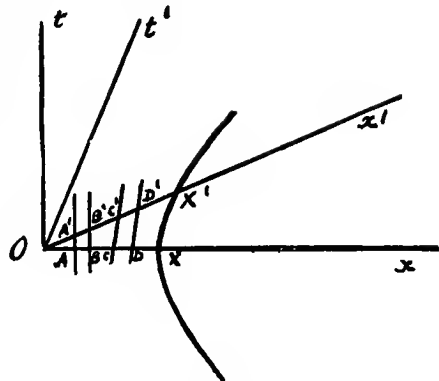


FIG. 9.

C'est pourquoi la droite  $AB$  et toutes les droites qui lui sont parallèles seront les *lieux de contemporanéité* par rapport à l'horloge étalon  $A$ . Or, on voit très facilement que la droite  $AB$

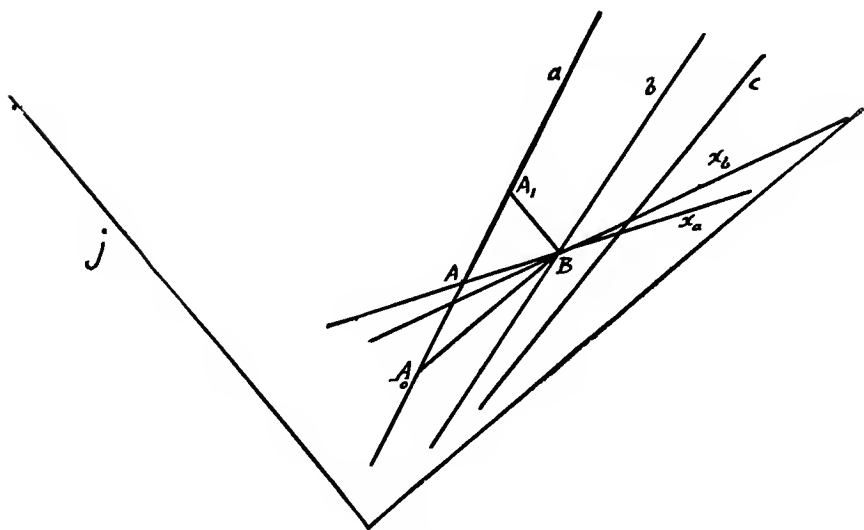


FIG. 10.

est la direction de l'axe des espaces, si l'on prend  $A$  comme direction de l'axe des temps.

On tire de là, qu'ayant pris comme horloge étalon celui de  $B$ , les lieux de contemporanéité auraient été constitués par les droites parallèles à  $x_b$ , c'est-à-dire à l'axe des espaces correspondant à la direction  $b$  prise comme axe des temps. Mais les directions  $x_a$ ,  $x_b$  ne coïncident pas, parce que l'angle  $x_a x_b$  est égal à l'angle  $ab$ . Donc des phénomènes contemporains par rapport à la première horloge ne le seraient plus par rapport à la seconde. On pourrait ainsi envisager comme contemporains des événements quelconques correspondant à des points  $A$ ,  $B$ , pourvu que la droite  $AB$  fut inclinée moins que  $45^\circ$  sur l'axe  $x$ .

Nous venons de parler de la transformation de Lorentz et de la contraction de Lorentz. Nous finirons en touchant aux relations qui passent entre cette transformation et les questions de calcul des variations qui ont formé le sujet d'une partie de cette leçon.

Nous avons montré la dérivation des équations de l'électrodynamique des questions du calcul des variations dans les cas

des systèmes en repos. Mais, M. Lorentz a montré qu'on peut avoir un résultat analogue dans le cas des corps en mouvement, et M. Poincaré<sup>19</sup> est revenu là-dessus et il a démontré que la transformation de Lorentz a la propriété de conserver sans altération l'expression qui paraît sous l'intégrale dans la question de calcul des variations; c'est-à-dire que ce que l'on peut appeler *l'action* ne change pas par la transformation de Lorentz. Ainsi le principe de la moindre action donne raison du succès de cette transformation.

<sup>1</sup> *Sopra le equazioni fondamentali dell' elettrodinamica.* Rend. Acc. dei Lincei, Vol. VII. 1° Sem. — N. Cimento, S. III, Vol. XXIX.

<sup>2</sup> *Æther and Matter.* Cambridge, 1900.

<sup>3</sup> *Théorie des corps déformables.* Paris, 1909.

<sup>4</sup> *Sulle equazioni generali dell' elasticità.* Ann. di Mat. S. II, T. X.

<sup>5</sup> Voir la citation dans la note 1.

<sup>6</sup> *Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni.* Rend. Acc. Lincei, Vol. VI. 1° Sem.

<sup>7</sup> Rend. Acc. Lincei, Vol. III. 2° Sem. 1887.

<sup>8</sup> Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. T. XXXIII.

<sup>9</sup> Voir la citation dans la note 5.

<sup>10</sup> *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.* Gött. Nachr. 1908. — *Raum und Zeit.* Jahresbericht der deutschen Math. Ver. Bd. 18.

<sup>11</sup> *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* Rend. Acc. Lincei, Vol. 1. 2° Sem. S. V.

<sup>12</sup> *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.* Art. 12. Acta. Math. T. 18.

<sup>13</sup> *Leçons sur la théorie math. de l'élasticité des corps solides.* 22<sup>ème</sup> Leçon. Paris, 1852.

<sup>14</sup> *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents.* Acta. Math. T. 16.

<sup>15</sup> J'ai traité cette question dans mon cours de physique mathématique en 1901.

<sup>16</sup> *Esercizi di fisica matematica.* Riv. di Mat. T. IV.

<sup>17</sup> *Sull' app. del metodo delle immagini alle eq. di tipo iperbolico.* Atti del IV. Congr. int. dei Mat. Vol. II. Roma, 1909.

<sup>18</sup> Voir la citation dans la note 10.

<sup>19</sup> *Sur la dynamique de l'électron.* Circolo matematico di Palermo, T. XXI.

## DEUXIÈME LEÇON

Introduction.—§ I. Problèmes anciens et modernes de la théorie de l'élasticité. Mécanique physique et mécanique analytique.—§ II. Loi de Hooke. L'élasticité et la courbure de l'espace; recherches de Beltrami; difficultés qu'on rencontre.—§ III. Problèmes statiques et problèmes dynamiques; types d'équations relatives. Méthodes pour intégrer les équations différentielles.—§ IV. L'évolution de la méthode de Green. Recherches de Betti et de Somigliana. L'équation multiple de Laplace.—§ V. Recherches de Kirchhoff. Les polémiques sur le principe de Huygens et les anciennes méthodes de Poisson.—§ VI. Les caractéristiques.—§ VII. Les vibrations des corps élastiques, recherches de Tedone, Love, Somigliana.—§ VIII. Les corps élastiques à connexion multiple; les distorsions; les efforts; nouvelle transformation du théorème de Green. Le problème fondamental des distorsions.—§ IX. Les vérifications expérimentales de la théorie de l'élasticité; difficultés; vérification par les distorsions et la biréfringence accidentelle; recherches de Corbino et Trabacchi.—§ X. La double équation de Laplace; différentes méthodes pour l'étudier. Recherches de Lauricella, Almansi, Levi-Civita, Boggio, Hadamard.—§ XI. Le théorème d'existence; les méthodes des approximations successives. Le théorème de Fredholm.—§ XII. La méthode des solutions simples. Les anciennes méthodes et les fondements des nouvelles méthodes de Hilbert.

Il serait intéressant de pouvoir exposer une histoire générale et synthétique des recherches de physique mathématique, c'est-à-dire une histoire de l'origine et de l'évolution des différentes conceptions qui se sont suivies dans cette branche de la science. Nous avons des histoires qui ont une grande valeur scientifique et philosophique, mais elles se rapportent en général à quelque chapitre spécial.

L'illustre auteur de l'histoire de la mécanique, M. Mach, le philosophe éminent qui a contribué si puissamment au développement moderne de la philosophie des sciences, nous a donné des essais qui ont le plus grand intérêt.

Todhunter et Pearson ont publié une histoire des recherches sur l'élasticité très appréciée, où les progrès de cette théorie sont exposés avec le plus grand soin et le plus grand détail et d'autres auteurs aussi ont illustré des points spéciaux, mais, à mon avis, il y-aurait encore beaucoup à dire.

Il serait instructif de suivre la lutte toujours engagée entre les



théories de l'émission et les théories ondulatoires, entre les théories atomiques et les anticorpusculaires, entre les explications mécaniques des phénomènes et les théories empiriques, et il serait utile d'examiner les orientations qu'ont pris les différents esprits devant la question des actions à distance, et des actions entre éléments contigus.

La guerre contre la "mythologie mécanique," la naissance et les transformations de l'énergétique sont des étapes de l'avancement scientifique qu'on pourrait examiner une fois encore avec beaucoup de profit. De ces études se dégagerait l'esprit de diverses écoles, et on pourrait dire, de différentes races. On verrait enfin, quelquefois à côté, quelquefois en avançant et le plus souvent en arrière, l'analyse mathématique se développant peu à peu. Mais nous n'avons pas le temps et il serait trop difficile pour moi de donner un tableau, même en raccourci, de ce mouvement d'idées qui, depuis plus d'un siècle, a contribué, avec tant de succès, au progrès de l'esprit scientifique et à de nombreuses applications pratiques.

Je resterai, dans cette leçon, entre des limites étroites et j'envisagerai une branche spéciale et aussi d'un point de vue limité.

Je me bornerai à exposer quelques points du développement de la théorie de l'élasticité qui toutefois peuvent donner des exemples très frappants sur quelques-unes des questions dont je viens de parler.

En même temps, d'un côté je me rattacherai à la leçon précédente, parce que c'est la théorie de l'élasticité qui a dominé pour un certain temps la théorie des ondes, et, d'un autre côté ce que je vais dire sera une introduction à la leçon suivante, soit par rapport aux méthodes analytiques, soit par rapport aux idées physiques qui en forment la base.

J'ai parlé tout-à-l'heure du grand ouvrage de Todhunter et Pearson, mais mon court aperçu n'aura rien à faire avec cette histoire détaillée. D'autre part dans le plan de cet ouvrage ne sont pas compris les travaux les plus récents et c'est justement de ces travaux que je désire m'occuper principalement aujourd'hui.

## § I

Depuis Galilée, qui a posé pour la première fois le problème de la flexion d'une poutre, on a toujours tâché d'appliquer les mathématiques aux problèmes de l'élasticité.

On n'avait pas en vue des questions théoriques et on était bien loin de penser qu'on préparait de cette manière les bases de l'optique moderne ; on était amené à ces problèmes par des questions pratiques qui intéressaient les constructions.

Après bien de tâtonnements on est parvenu à établir les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques.

C'est la loi qu'on appelle de Hooke qui a été le fondement, mais il a fallu d'abord en transformer l'expression primitive pour l'appliquer au cas général. Nous verrons de plus près cette loi dans la prochaine leçon.

Bornons-nous maintenant à dire que le mérite d'avoir obtenu des équations générales est de Navier, mais il faut associer à son nom ceux de Lamé, de Cauchy, de Poisson, de Green, et aussi d'autres.

Je désire remarquer aussi que ces auteurs ont établi des équations qui, dans une première approximation, correspondent d'une manière générale à tous les problèmes qui peuvent se présenter, et que cela se relie, comme j'ai dit dans la leçon précédente, à l'esprit philosophique qui dominait déjà dans la mécanique classique.

Tout le monde connaît la distinction établie par Poisson entre la mécanique analytique et la mécanique physique qu'il opposait à la première. Les forces de liaisons introduites par Lagrange dominant dans la première. Les tensions, selon son point de vue, sont des forces de liaison. Par contre, en suivant Poisson, elles sont le résultat des actions moléculaires. La matière est continue pour la mécanique analytique et elle est discontinue et constituée par des particules pour la mécanique physique.

C'est Laplace qui a proposé de construire les différentes théories physiques sur la base des hypothèses moléculaires et des actions à distance, et Poisson a bâti sur cette idée fondamentale.

Il faut reconnaître que la théorie de l'élasticité a surgi d'abord sur ces dernières idées. En effet Navier et ses continuateurs sont partis des hypothèses moléculaires, et par des passages à la limite, en remplaçant des sommes par des intégrales, ils ont atteint les équations différentielles. Ce n'est que plus tard qu'on a employé les méthodes de la mécanique analytique et de l'énergétique pour obtenir les équations générales de l'élasticité.

Poisson et Cauchy supposaient que les actions étaient des forces centrales. On arrive par là, comme il est bien connu, à des résultats qui sont en contradiction avec les observations. Donc si l'on veut suivre les méthodes de la mécanique physique il faut abandonner l'hypothèse des forces centrales et il faut supposer que les forces intérieures dépendent de l'orientation des molécules. De cette manière on peut rejoindre le résultat qu'on obtient par l'hypothèse de la matière continue en appliquant les principes généraux de l'énergétique.

Il y a eu des tentatifs de conciliation de l'hypothèse des actions centrales avec les résultats de l'observation, en ayant égard aux mouvements des molécules, mais je n'insisterai pas là-dessus. En me rattachant à ce que nous avons exposé dans la leçon précédente je dois ajouter que, si l'on cherche à expliquer les actions à distance par des actions élastiques entre éléments contigus, comme a fait Maxwell, il faut dès le premier moment constituer la théorie de l'élasticité sur les méthodes de la mécanique analytique, parce qu'autrement les actions à distance, éliminées d'un côté, reparaitraient de l'autre.

## § II

J'ai parlé tout-à-l'heure de la loi de Hooke.

C'est cette loi qu'amène à des équations différentielles linéaires, car elle établit une relation linéaire entre le *strain* et le *stress* d'où vient tout le succès analytique de la théorie de l'élasticité. Comme nous verrons on a réussi à transformer les équations différentielles en équations intégrales et dans quelques cas par cette transformation on a obtenu des résultats d'un grand intérêt. Les équations intégrales aussi qu'on trouve sont des équations linéaires.

Mais la loi de Hooke n'est qu'une loi approximative. Nous discuterons ce point dans la prochaine leçon. Ce qu'on peut dire, dès à présent, est que, si l'on tâche de tenir compte des termes d'ordre supérieur, c'est-à-dire qu'on suppose qu'entre le *strain* et les *stress* il y ait une relation plus compliquée qu'une simple relation linéaire, les équations différentielles cessent d'être linéaires et les méthodes analytiques classiques ne peuvent plus s'appliquer d'une manière directe.

J'ai parlé dans la leçon précédente de la transformation des équations de l'élasticité et j'ai dit qu'on peut même supposer que l'espace ait une courbure.

Il suffit pour cela de négliger les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients du carré de l'élément linéaire pour que l'espace soit Euclidien. Beltrami, Cesaro, Padova, et d'autres géomètres ont envisagé la question de cette manière.<sup>1</sup>

On espérait par là, en comparant les observations de quelques phénomènes avec les résultats du calcul, qu'on aurait pû tirer des indications sur la valeur de la courbure de notre espace. Ce problème était le principal but que Beltrami s'était proposé dans la dernière partie de sa carrière scientifique. C'est pourquoi il a posé la théorie de plusieurs phénomènes physiques dans les espaces courbes. Aucun résultat positif n'a pû cependant en être tiré. Klein a remarqué à ce propos que, si effectivement notre espace avait une courbure, elle serait si petite que les termes de correction qu'on devrait ajouter aux équations ordinaires de l'élasticité seraient bien probablement masqués par les termes qu'on néglige pour rendre les équations linéaires. Toujours est-il que les essais faits par Beltrami pour constituer une physique mathématique des milieux ayant une courbure a un intérêt qui dépasse la simple curiosité analytique. Peut-être il-y-a des secrets de la nature cachés là dedans.

### § III

Nous allons passer maintenant à la question de l'intégration des équations de l'élasticité, que nous étudierons d'une manière détaillée. Il nous faut faire d'abord quelques distinctions. D'un côté il faut placer les problèmes de l'équilibre et de l'autre côté les problèmes du mouvement. Les équations différentielles qu'on trouve dans les deux cas appartiennent à des types différents. Les premières appartiennent au type elliptique, les autres au type hyperbolique. Pour montrer, par des exemples, la distinction entre les deux types j'envisage l'équation de Laplace qui est elliptique

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

et l'équation des potentiels retardés à trois variables qui est du type hyperbolique

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Nous avons déjà vu dans la leçon précédente que l'on peut passer d'un type à l'autre en supposant le temps imaginaire.

Au point de vue des propriétés fonctionnelles, ce qui caractérise les deux types consiste en ceci : que dans le premier cas (elliptique) les valeurs de  $u$  au contour d'un certain champ déterminent les valeurs à l'intérieur, et, toute discontinuité ou singularité au contour ne se propage pas à l'intérieur. Dans le second cas l'espace individualisé par les variables  $x, y, t$  doit être divisé, par rapport à chaque point intérieur  $A$ , en trois régions I, II, III, par le cône caractéristique qui a le sommet dans ce point. Si l'on mène une surface dont  $A$  est à l'intérieur le cône divise la surface en trois parties 1, 2, 3. La valeur de  $u$  au sommet du cône peut être calculée respectivement par les valeurs de  $u$  et de ses dérivées dans une des trois parties 1, 2, 3.<sup>2</sup>

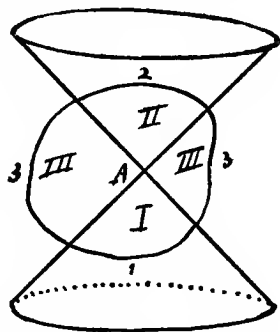


FIG. 11.

En outre les singularités sur les surfaces se propagent à l'intérieur.

Si l'on passe des simples équations que nous avons envisagées aux systèmes des équations qui donnent les lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, ces propriétés se conservent.

Par rapport aux méthodes générales qu'on emploie pour l'intégration des équations différentielles, il faut les ranger en deux grandes classes :

Celles, qui d'une manière plus ou moins directe, se rattachent à l'idée fondamentale de Green, et celles des solutions simples qui ressortent de Fourier.

On peut aussi distinguer les premières méthodes en méthodes pures où la conception pure de Green suffit toute seule, et dans celles où la conception primitive de Green a évolué par l'introduction apparente ou cachée (Kirchhoff) d'une autre conception : celle des caractéristiques. Les premières s'employent pour les équations elliptiques, les autres pour les équations hyperboliques.

Il faut enfin ajouter que dernièrement toutes ces méthodes ont reçu un nouvel essor par l'emploi des équations intégrales. La conception de l'hérédité a fait aussi transporter ces méthodes dans un nouveau champ dont nous parlerons dans la dernière leçon.

## § IV

Attachons-nous d'abord à la méthode de Green et suivons son évolution. Je vais en décrire en peu de mots les étapes successives. On a eu d'abord la méthode pure de Green appliquée à l'équation de Laplace.

Deux fonctions quelconques régulières qui satisfont à l'équation  $\Delta^2 = 0$  vérifient à une loi de réciprocité générale. Si l'on prend une de ces fonctions égale à la solution fondamentale  $\frac{1}{r}$ ,

$r$  étant la distance entre un point fini et un point variable, on peut arriver à déterminer une fonction harmonique à l'intérieur d'un champ, lorsqu'on connaît au contour ses valeurs et celles de sa dérivée normale. Ces dernières disparaissent en introduisant la fonction de Green. Le pas suivant qui a élargi tout d'un-coup la méthode de Green, et qui a montré d'une manière nouvelle la fécondité de sa conception, est dû à Betti. En effet il a transporté la méthode de Green dans le champ de l'élasticité où l'on n'à plus une seule équation différentielle, mais un système d'équations différentielles.<sup>3</sup> Betti a d'abord étendu le théorème de réciprocité par la proposition suivante :

“Si deux systèmes de forces extérieures déterminent deux systèmes de déplacements dans un corps élastique, le travail que le premier système de forces fait en donnant au corps le second déplacement est égal au travail que le deuxième système de forces fait par le premier déplacement.” Après avoir découvert ce théorème il fallait l'employer pour déterminer les valeurs des déplacements à l'intérieur du corps élastique, étant donné les valeurs au contour des déplacements mêmes ou des tensions, les forces de masse internes étant connues.

Deux voies s'ouvraient pour résoudre ce problème, dans le cas des corps isotropes, celle que Betti a d'abord suivie et celle que Somigliana a tenue après. Betti a commencé par éliminer les forces de masse, ce qui ne présentait pas de difficultés. Il a calculé après quatre solutions fondamentales, qui lui ont servi pour déterminer la dilatation et les trois composantes de la rotation de chaque particule du milieu élastique en fonction des déplacements et des tensions au contour. Moyennant ces éléments il a montré qu'on pouvait obtenir les déplacements internes.

Ce procédé, tout étant simple, n'est pas direct. M. Somigliana, au contraire, a suivi une voie directe, car il a déterminé des

solutions fondamentales qui lui ont servi, en employant la loi de réciprocité, pour déterminer les déplacements sans l'intermédiaire de la dilatation ni des rotations.<sup>4</sup>

Il n'y-a-pas de difficulté à obtenir un passage entre les résultats de Betti et ceux de Somigliana et à montrer que les uns peuvent se déduire des autres.

Une autre extension, tout à fait pareille, de la méthode de Green, qui se rattache à un problème très moderne, se rapporte à la double équation de Laplace et à l'équation multiple de Laplace, c'est-à-dire à l'équation  $\Delta^2 \Delta^2 = 0$  et en général l'équation  $\Delta^2 \Delta^2 \dots \Delta^2 = 0$ .

Nous verrons sous peu l'intérêt de ce problème.

Nous avons déjà remarqué qu'une fois la formule de Green trouvée pour l'équation de Laplace, le problème de déterminer une fonction harmonique (ses valeurs au contour étant données) n'est pas encore résolu. La formule de Green résout le problème, lorsqu'au contour les valeurs de la fonction et de la dérivée normale sont connues. Ses dernières s'éliminent, comme nous avons déjà dit, par la fonction de Green. De même, dans le problème de l'élasticité, s'éliminent au contour les valeurs des déplacements, ou des tensions, par des fonctions analogues. Leur détermination se fait d'une manière complète dans le cas de la sphère et, si l'on envisage le problème à deux dimensions, dans le cas du cercle. C'est pourquoi le problème de la sphère et du cercle ont une position privilégiée dans le champ de ces questions. Les cas du plan et de la droite peuvent être envisagés comme des cas limites. On peut répéter les mêmes choses dans les cas de l'équation multiple de Laplace.

## § V

Passons maintenant aux applications de la méthode de Green aux équations de type hyperbolique, et attachons-nous d'abord aux travaux de Kirchhoff.<sup>5</sup>

Le cas qu'il a traité est celui de l'équation

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

c'est-à-dire celle des potentiels retardés à quatre variables.

L'espace avec lequel il a à faire est un espace à quatre dimensions qui constitue le monde de Minkowski, comme nous avons vu dans la leçon précédente, mais, dans sa méthode, les

considérations relatives aux hyperespaces restent cachées. Il commence par le théorème de réciprocité et après il prend comme solution fondamentale celle de Euler qui a la forme  $\frac{f(r+t)}{r}$ . C'est par là qu'il rejoint le but, de sorte que sa méthode réussit à cause de l'existence de cette intégrale. Comme nous avons remarqué dans la leçon précédente, l'existence de cette intégrale est liée au fait que l'onde sphérique dans le cas de l'espace isotrope à 3 dimensions est une onde sans résidu.

La formule de Kirchhoff a donné la clef du principe de Huyghens. On employait, même avant Kirchhoff, ce principe, mais on n'en avait pas une conception exacte. En effet les polémiques et les discussions sur ce principe ont cessé seulement après que cette formule a été découverte.

A ce propos il est intéressant de revenir sur une question qui a été agitée entre Fresnel et Poisson, dont nous dirons sous peu quelques mots. Mais il nous faudra d'abord parler d'une formule célèbre qui a été découverte par Poisson. La formule de Green, lorsque l'espace qu'on envisage est sphérique et le pôle est au centre de la sphère, amène à un théorème bien connu de Gauss, c'est-à-dire que, pour toute fonction harmonique, la valeur au centre d'une sphère est égale à la moyenne de ses valeurs le long de la surface sphérique. De même si nous spécialisons la formule de Kirchhoff au cas d'une sphère, le pôle étant au centre, on obtient l'intégrale générale de l'équation  $\square u = 0$  que Poisson avait donnée bien avant la formule de Kirchhoff.<sup>6</sup> Poisson avait obtenu cette intégrale par des méthodes tout-à-fait différentes, qu'on a presque abandonnées maintenant, mais qui ont un grand intérêt, parce qu'elles ont été d'une fécondité enorme en lui permettant d'intégrer un grand nombre d'équations différentielles. La méthode de Poisson consistait à développer l'intégrale générale de l'équation  $\square u = 0$  dans une série de puissances de  $t$ , et à sommer après la série par des intégrales définies. Aujourd'hui lorsqu'on veut obtenir l'intégrale de Poisson on peut procéder directement sans passer à travers la formule de Kirchhoff et il n'est pas nécessaire non plus de suivre Poisson. Les traités modernes donnent en effet des méthodes très élégantes et très simples par lesquelles tout est réduit à trouver l'intégrale de d'Alembert de l'équation des cordes vibrantes. Tout ce qui se rapporte à l'équation  $\square u = 0$



est renfermé dans l'intégrale de Poisson et si l'on sait y lire dedans on y voit paraître même le principe de Huyghens dans toute sa généralité et d'une manière fort claire.

C'est ce que Beltrami a montré dans un de ses beaux mémoires, où il a prouvé que Poisson possédait au point de vue analytique ce qu'il fallait pour pénétrer dans l'esprit de ce principe.<sup>7</sup>

En revanche il n'y croyait pas, comme le prouve la polémique qu'il a eu avec Fresnel qui employait largement et d'une manière intuitive le principe de Huyghens sans en avoir une démonstration complète, tout en le justifiant par un aperçu clair et frappant.

Voilà un exemple où l'esprit d'un physicien a dépassé celui d'un mathématicien par l'intuition du phénomène. Mais l'intuition peut être dangereuse.

En effet on se tromperait si l'on voulait employer les mêmes considérations intuitives pour l'équation analogue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dans ce cas, comme nous avons montré dans la leçon précédente, l'onde est résiduelle et le principe de Huyghens n'existe pas. Au moins il n'existe pas dans sa forme classique telle que Huyghens le concevait.

## § VI

Si nous voulons poursuivre dans l'évolution de la conception fondamentale de Green, il faut passer de l'équation  $\square u = 0$  à quatre variables à celle à trois variables. Ce passage, quoiqu'il en puisse paraître au premier abord, constitue un pas en avant, parce que le cas de trois variables est plus difficile que celui de quatre variables.

La méthode de Green telle que Kirchhoff l'avait transformée pour les équations hyperboliques pouvait être employée aussi pour l'équation à trois variables

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

mais il fallait trouver une intégrale fondamentale d'une nature tout-à-fait différente de celle de Euler, dont Kirchhoff avait fait usage.

En effet l'intégrale qu'il faut remplacer à celle-ci est compliquée par des intégrales définies. Je vais énoncer le résultat final qu'on trouve par cette voie.<sup>8</sup>

Envisageons le monde de Minkowski à trois dimensions et

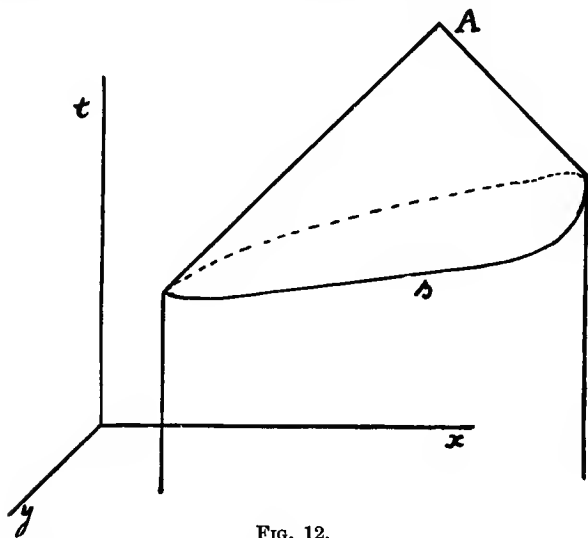


FIG. 12.

considérons un cylindre quelconque, ayant les génératrices parallèles à l'axe  $t$ . Prenons un point interne au cylindre et menons le cône caractéristique dont une nappe coupe le cylindre

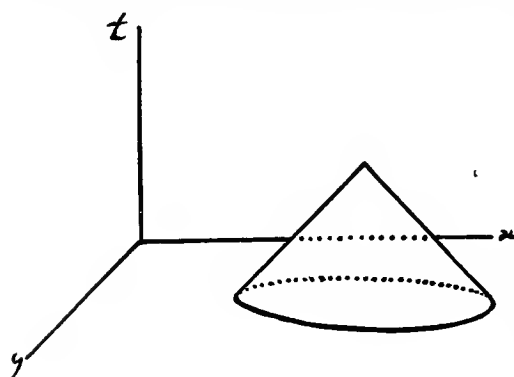


FIG. 13.

le long d'une ligne  $s$ . On peut exprimer la valeur de l'intégrale au sommet du cône par les valeurs de l'intégrale et de sa dérivée normale sur la surface du cylindre, depuis la ligne  $s$  jusqu'à l'infini.

D'un autre côté nous avons tout-à-l'heure parlé de l'intégrale générale de Poisson. On peut la spécialiser en supposant qu'elle soit indépendante de la coordonnée  $z$ .

Elle donne alors l'intégrale générale de l'équation  $\square u = 0$  à trois variables et elle s'appelle l'intégrale de Parseval. Envisa-

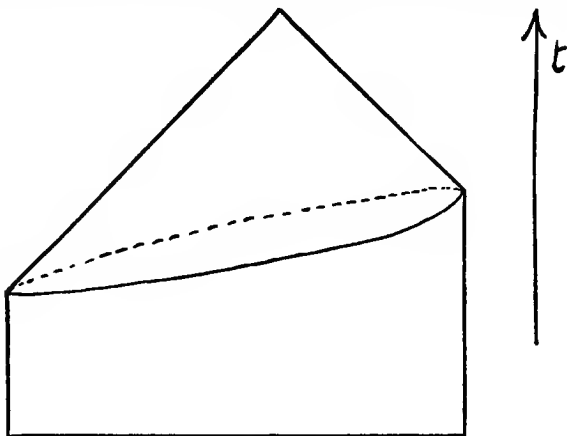


FIG. 14.

geons le monde de Minkowski à trois dimensions et le cône caractéristique d'un point. Il coupe le plan  $xy$  le long d'un cercle. La formule de Parseval donne la valeur de l'intégrale au sommet du cône par les valeurs de l'intégrale même et de sa dérivée normale sur le cercle.

En rapprochant les deux formules on était amené à se pro-

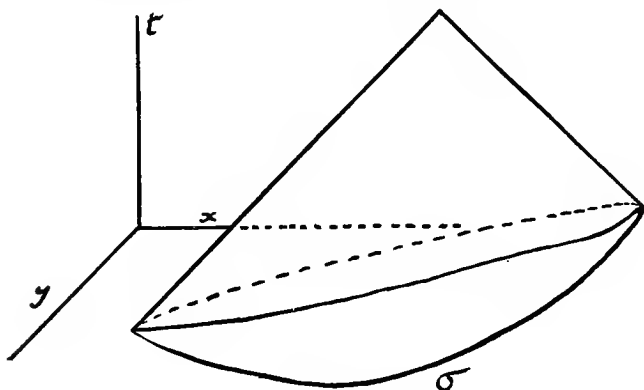


FIG. 15.

poser le problème de déterminer l'intégrale si l'on connaît sa valeur et celle de sa dérivée normale sur une surface  $\sigma$  formée par une partie cylindrique et une partie plane et en général sur une surface quelconque limitée par le cône.

Pour résoudre ce problème la méthode pure de Green et celle de Green-Kirchhoff font défaut. J'ai du recourir à d'autres méthodes, c'est-à-dire j'ai fait jouer, du premier abord, le rôle principal au cône caractéristique, qui ressortait dans les résultats sans paraître dans les calculs. Or pour donner le rôle fondamentale au cône caractéristique il convenait se rapprocher aux méthodes que Riemann avait employé dans le cas de deux variables.

La méthode des caractéristiques, dont nous venons de parler, représente la dernière phase d'évolution de la conception primitive de Green. En effet il faut aussi dans cette méthode employer un théorème de réciprocité et se servir d'une solution qui joue le rôle de solution fondamentale.

Dans le cas de l'équation  $\square u = 0$  à trois variables la solution est choisie de telle sorte que dans la formule de réciprocité tous les termes étendus à la surface caractéristique disparaissent, et il reste une intégrale étendue à  $\sigma$  ainsi qu'une intégrale étendue à la parallèle à l'axe  $t$  menée par le sommet du cône.

On élimine cette intégrale par une dérivation et la valeur au sommet paraît à la fin du calcul.<sup>9</sup>

M. Hadamard a modifié ce procédé. Il a fait usage d'une fonction qui, appliquée directement, conduirait à des termes infinis, mais il a réussi à les faire disparaître d'une manière très adroite et très élégante par un artifice qu'il a découvert.<sup>10</sup>

## § VII

Les procédés que nous venons d'exposer se rapportent au cas de l'équation du potentiel retardé, mais si l'on veut envisager le problème complet qui se présente dans l'élasticité il faut examiner aussi les systèmes des équations différentielles qui donnent les lois des vibrations des corps élastiques. Il est donc nécessaire de faire un passage analogue à celui que Betti a fait, lorsqu'il a transporté la méthode de Green de l'équation de Laplace au système des équations de l'équilibre des corps élastiques. Pour le cas des systèmes plans où le monde de Minkowski est à trois dimensions, le grand chemin est toujours donné par la méthode des caractéristiques. Mais pour le cas où le monde de Minkowski est à quatre dimensions, il n'est pas nécessaire d'employer cette méthode. En la suivant on se donnerait une peine inutile.

Je vais en expliquer la raison, en supposant, pour un instant, de vouloir retrouver la formule de Kirchhoff par la méthode des caractéristiques. Pour que la chose soit intuitive il suffit de prendre la figure 15, et imaginer la transporter dans un espace à quatre dimensions en ajoutant une dimension à toutes ses parties.

Or la considération de  $\sigma$  devient inutile dans ce transport, car la valeur de l'intégrale au sommet du cône dépend seulement des valeurs de l'intégrale et de ses dérivées sur l'intersection correspondante à la ligne  $s$ . C'est pourquoi il n'est pas nécessaire d'employer un procédé où l'on envisage  $\sigma$  et  $S$ .

M. Tedone a montré l'élimination effective de  $\sigma$  en calculant la formule de Kirchhoff par la méthode des caractéristiques. Il a été aussi le premier qui, en étendant le même procédé aux équations des vibrations des corps élastiques à trois dimensions, a trouvé les formules générales qui correspondent à celle de Kirchhoff. Mais il a démontré qu'on pouvait les obtenir directement en suivant un chemin qui se rapproche à celui de Kirchhoff.<sup>11</sup> Quelque temps après, M. Love<sup>12</sup> et plus récemment encore M. Somigliana<sup>13</sup> ont donné des méthodes plus directes et plus complètes de sorte que cette branche de la science de l'élasticité a été étudiée d'une manière très profonde. Ce que nous venons de dire se rapporte au cas où l'on suppose que les ondes se propagent sans résistance. Si l'on tient compte de la résistance on ne peut pas négliger le résidu laissé par les ondes. L'équation différentielle est alors  $\square u = hu$  et on peut la traiter soit par une méthode qui se rapproche à celle de Kirchhoff, soit par celle des caractéristiques dans les espaces à quatre dimensions. Ce n'est que par cette dernière méthode qu'on peut trouver des résultats généraux.<sup>14</sup>

### § VIII

Nous allons faire maintenant un pas en arrière. Laissant de côté la question dynamique, revenons au problème de l'équilibre des corps élastiques.

Une nouvelle branche d'étude a été développée tout récemment; celle de l'équilibre des corps élastiques à connexion multiple.<sup>15</sup> En général les questions de physique mathématique se présentent de manières différentes suivant les connexions des espaces qu'on envisage. Je commence par rappeler les

lois du mouvement des fluides incompressibles dans un récipient rigide fermé.

S'il n'y a pas de tourbillons, et, si le récipient a une connexion simple, le fluide doit être nécessairement en repos. Il peut être, au contraire, en mouvement si le récipient a une forme tubulaire, c'est-à-dire en général s'il a une connexion multiple. La cause de cette différence vient de ceci.

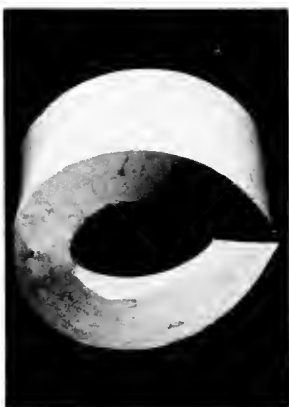
S'il n'y a pas de tourbillons il existe un potentiel de vitesse. Or ce potentiel peut être polydrome dans le cas d'une connexion multiple, mais il doit être monodrome dans le cas de la connexion simple, en supposant que les composantes des vitesses des particules du fluide soient régulières.

Des propriétés tout-à-fait analogues ont lieu pour les corps élastiques en équilibre. Avant d'aborder cette étude il faut établir ce qu'on doit entendre par *strain* régulier d'un corps élastique. Si les éléments qui caractérisent la déformation sont des fonctions monodromes, finies et continues, ayant aussi les dérivées du premier et du second ordre par rapport aux coordonnées, monodromes, finies et continues dans un certain domaine, on dit que dans ce domaine le strain est régulier. On peut donner des formules par lesquelles on tire du strain les déplacements des points du corps élastique. Or, si le strain est régulier, et le corps occupe un espace simplement connexe, les déplacements sont des fonctions monodromes, tandis que, si l'espace est multiplement connexe, les déplacements peuvent résulter polydromes.

On peut donner une interprétation mécanique de ce théorème cinématique sur le strain. La voici: Si un corps élastique, à une forme simplement connexe, n'est pas sujet à des efforts extérieurs il doit être à l'état naturel, son strain étant régulier. Au contraire, un corps élastique, ayant une connexion multiple, peut se trouver dans un état de tension, même si le strain est régulier et s'il n'est pas sujet à des efforts extérieurs.

Il y a donc des cas d'équilibre pour les corps à connexion multiple qui ne se présentent pas pour les autres. Dans ces cas la tension n'est pas produite par des efforts extérieurs. Elle peut s'obtenir en appliquant des *distortions*. En effet il est bien connu qu'un corps ayant une connexion multiple peut être sectionné sans qu'il soit divisé en parties. Après avoir sectionné le corps déplaçons les deux faces de chaque coupure l'une par rapport à l'autre, de manière que les déplacements relatifs







des différentes coupes des particules (qui adhèrent entre elles et que la coupe a séparées) soient résultantes de rotations et de translations égales.

Rétablissons enfin la connexion et la continuité en retranchant ou en ajoutant la matière nécessaire et en ressoudant les parties entre elles. L'ensemble des opérations faites pour chaque coupe s'appelle une *distorsion*. Une fois qu'elle a été exécutée, le strain est régulier le long de la coupe, ainsi que dans toute autre partie du corps, de sorte qu'il est impossible de trouver l'endroit où la coupe a été faite si l'on tâche de la reconnaître par quelque singularité de la déformation. Le strain est ainsi partout régulier, mais les déplacements ont une discontinuité le long de la coupe, ce qui constitue au point de vue analytique une polydromie des déplacements.

Comme une distorsion est déterminée par un déplacement rigide relatif des coupes des particules qui adhèrent avant la coupe, et puisque tout déplacement rigide est décomposable en trois translations et en trois rotations par rapport aux axes coordonnés, on pourra caractériser chaque distorsion par six éléments, correspondants aux trois translations et aux trois rotations. En supposant qu'un de ces éléments soit l'unité et les autres soient nuls on a une distorsion élémentaire. Voici (Pl. 1) les modèles en plâtre des formes prises par des gros tubes de caoutchouc qui ont été assujettis aux six distorsions élémentaires.

Si on les compare avec les résultats du calcul, les mesures et les observations confirment toutes les particularités que le calcul avait prévu. Nous parlerons tout-à-l'heure d'une vérification expérimentale qui a une exactitude beaucoup plus grande.

Nous avons vu que le principe de réciprocité de Green peut se transporter dans la théorie de l'élasticité et qu'il amène au théorème de Betti. Ce théorème ne subsiste plus lorsque les déplacements deviennent polydromes en vertu des distorsions, mais on a alors un nouveau principe de réciprocité, d'un aspect différent, qui domine toute la théorie.

Pour le trouver, composons les tensions qui s'exercent sur les éléments d'une coupe dès qu'on a fait les distorsions. On obtiendra une force résultante et un couple résultant. C'est ce qu'on appelle l'*effort* qui s'exerce sur la coupe. En décomposant la force et le couple suivant les axes coordonnés, on aura six éléments qui caractérisent chaque effort, ainsi qu'on a six éléments qui caractérisent chaque distorsion. Si le corps a une con-

nexion d'ordre  $n+1$ , on peut faire  $n$  coupures et l'on a, par suite,  $6n$  caractéristiques des efforts :  $S_1, S_2, \dots, S_{6n}$ , et  $6n$  caractéristiques des distortions :  $s_1, s_2, \dots, s_{6n}$ . Les unes correspondent aux autres, c'est-à-dire  $S_i$  à  $s_i$  en prenant comme éléments corrélatifs les composantes des forces et des translations, des couples et des rotations, par rapport aux mêmes axes et à la même coupure. Or, les caractéristiques des efforts s'expriment linéairement par celles des distortions :  $S_i = \sum_h E_{ih} s_h$ . Les coefficients  $E_{ih}$  sont symétriques, c'est-à-dire  $E_{ih} = E_{hi}$ . Voilà en quoi consiste le théorème de réciprocité. On peut en obtenir finalement une interprétation mécanique.

Le problème fondamental de la théorie des distortions consiste à déterminer les efforts lorsqu'on connaît les distortions. Le théorème de réciprocité que nous venons d'énoncer réduit considérablement le nombre des inconnues du problème.

Un des cas où le problème fondamental peut se résoudre est celui où le corps est constitué par un réseau de verges rectilignes ou courbes, ou des ressorts. La théorie qu'on peut développer à ce sujet est analogue à celle de Kirchhoff sur la distribution des courants électriques dans des fils conducteurs, mais les équations sont sextuplées.

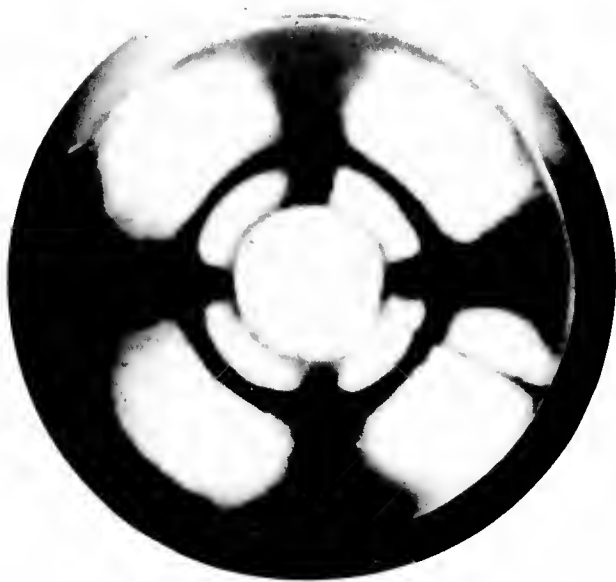
## § IX

Je ne quitterai pas la théorie des distortions sans avoir parlé de son application récente pour vérifier expérimentalement les lois théoriques de l'élasticité.

On rencontre deux sortes de difficultés si l'on veut faire des vérifications expérimentales de la théorie de l'élasticité. D'un côté il est presque impossible de distribuer les actions externes qui sollicitent la surface du corps d'une manière continue sans tomber dans des cas trop simples. D'un autre côté la vérification expérimentale n'est pas complète, si l'on se borne à déterminer la seule déformation apparente du corps, car la chose la plus intéressante est de vérifier la distribution des tensions internes prévues par le calcul.

On peut éliminer la première difficulté en supprimant toute action extérieure et en assujettissant le corps à des distortions. Alors la déformation est due aux actions seules que les différentes parties du corps exercent les unes sur les autres. L'autre difficulté s'évanouit, si l'on fait usage d'un corps élastique





Pl. II.

transparent tel que la gélatine. La biréfringence accidentelle donne la distribution des tensions internes.

C'est ce que MM. Corbino et Trabacchi ont imaginé et réalisé avec beaucoup de succès.<sup>16</sup> Ils ont employé un cylindre creux de gélatine de petite hauteur où ils engendraient des distorsions en y faisant des fissures radiales ou des fissures à faces parallèles et en rapprochant et en soudant après les faces de la coupure.

Ils observaient le cylindre avec de la lumière polarisée qui se propageait dans le sens de l'axe en projetant à travers un analyseur l'image du cylindre.

Voici les dispositions dont ils ont fait usage. *B* est une cuvette où l'on posait les cylindres de gélatine assujettis aux

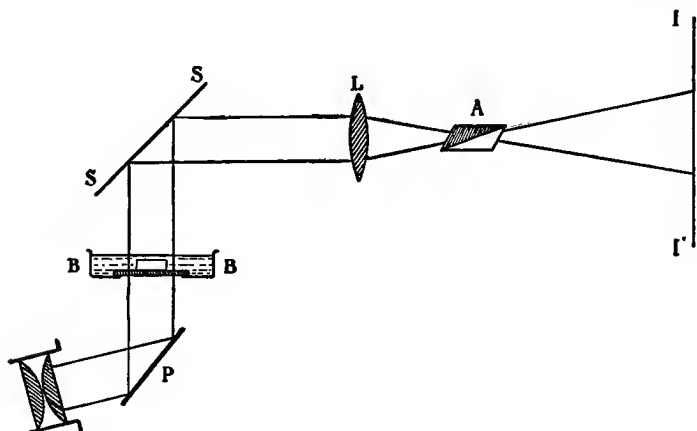


FIG. 16.

distorsions, *P* est un miroir noir (polariseur) qui envoyait verticalement un faisceau de lumière polarisée. Après avoir traversé le cylindre le faisceau lumineux était réfléchi horizontalement par un miroir ordinaire *S*, et il était concentré par une lentille *L* sur une machine photographique sans objectif *I*. Un nicol était placé en *A* et il fonctionnait d'analyseur.

Voici (Pl. II) les photographies des projections lorsque les nicols sont croisés. La première se rapporte au cylindre dans lequel on a fait la fissure radiale. On obtient une croix noire et un cercle noir. La figure ne change pas si l'on fait tourner le cylindre autour de l'axe. Les lignes noires de la croix correspondent toujours aux sections principales des polariseurs croisés.

D'un autre côté M. Corbino a calculé, par la théorie de la biréfringence et en appliquant les formules de la théorie élastique

des distorsions, l'intensité  $I$  des différents rayons de lumière qui sortent du cylindre de gélatine. Si l'on fait  $I=0$ , on a l'équation des lignes noires. On trouve ainsi trois lignes, c'est-à-dire les deux branches de la croix et un cercle, dont le rayon est

$$r = R_1 R_2 \sqrt{\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}},$$

$R_1$  étant le rayon externe et  $R_2$  le rayon interne du cylindre creux. C'est pourquoi la vérification expérimentale peut être

faite d'une manière très rigoureuse et l'on trouve des valeurs qui coïncident avec une grande exactitude avec celles données par les calculs.

Les figures correspondent à la distorsion due à une fissure à faces parallèles.

Dans ce cas l'image du cylindre change avec l'angle que la coupure forme avec une section principale du polariseur.

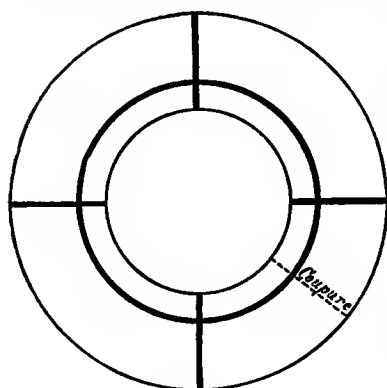


FIG. 17.

On a l'image figure 18 si la coupure est parallèle à une section principale et l'image figure 19 si elle est inclinée de  $45^\circ$ .

Mais dans le premier cas le calcul montre que les lignes noires sont constituées par la section même et par une ligne construite dans la figure 18 *a* ayant pour équation en coordonnées polaires  $r, \theta$

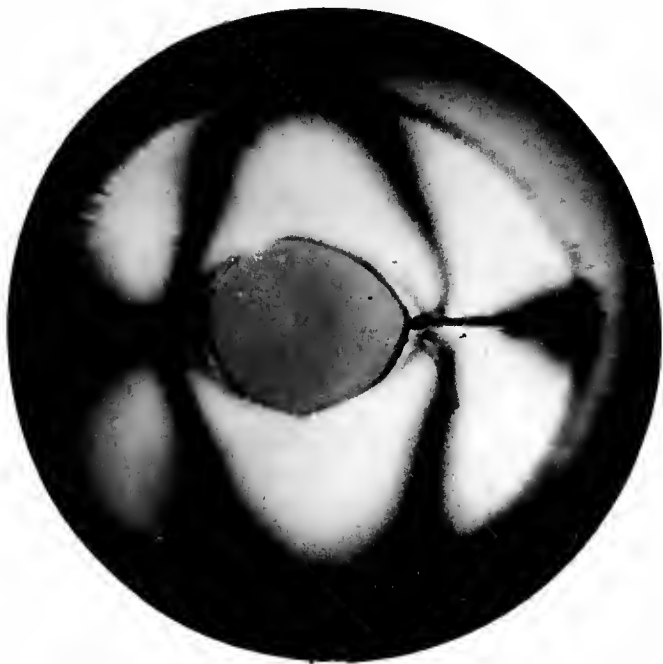
$$r^2 = \frac{1+e^2}{2e^2} R_1^2 \left[ \sqrt{\cos^2 2\theta + (1+2\cos\theta) \frac{4e^2}{(1+e^2)^2}} - \cos 2\theta \right]$$

où  $e$  est le rapport  $\frac{R_1}{R_2}$ .

De même si l'on calcule quelles doivent être les lignes noires dans le second cas on trouve la figure 19 *a*. La comparaison entre les figures 18 et 18 *a*, 19 et 19 *a*, montre une coïncidence parfaite, et en poussant même dans la comparaison qualitative et quantitative des résultats de l'observation avec ceux du calcul, jusqu'aux plus petites particularités comme ce serait l'existence des points noirs  $M, N, P, Q, R, S$ , on trouve toujours la corre-



FIG. 18



PL. III.

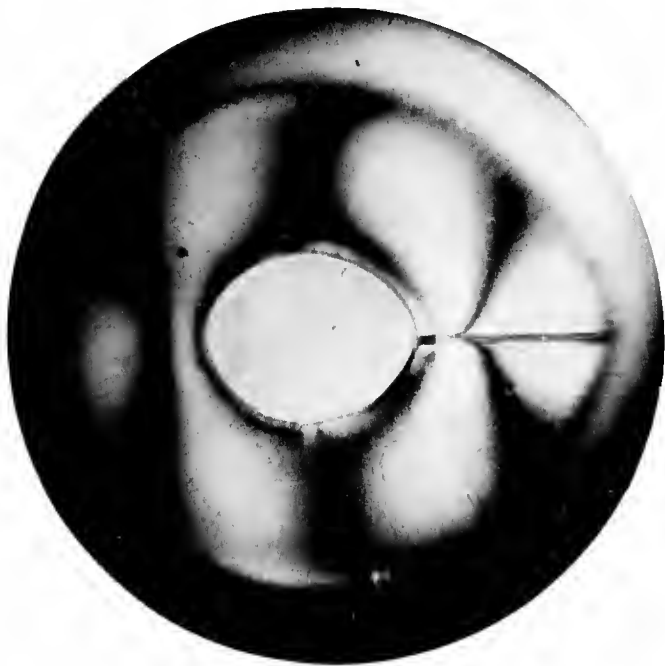


FIG. 19



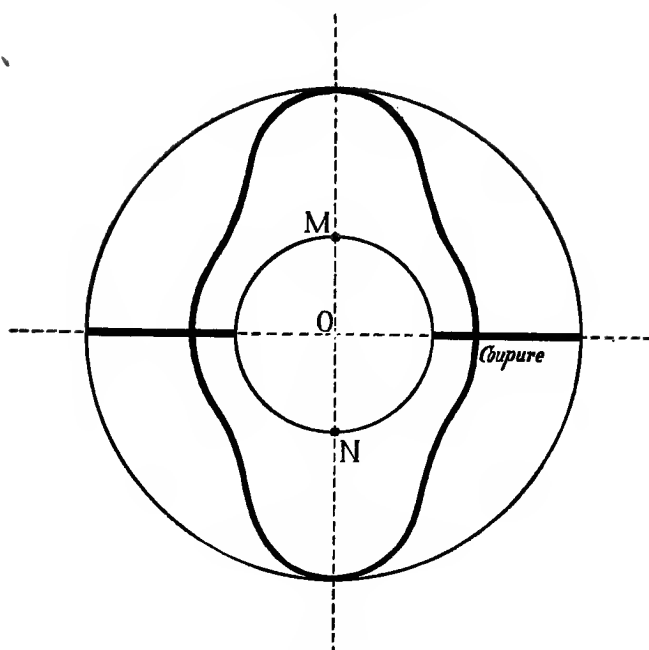


FIG. 18a.

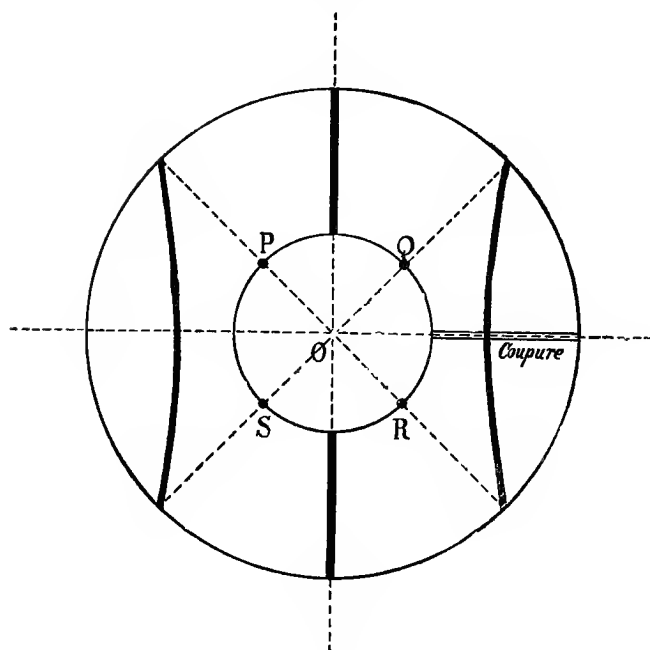


FIG. 19a.

spondance la plus parfaite. Ces résultats, tout-à-fait nouveaux, prouvent d'une manière complète et frappante avec quel haut degré de précision la théorie mathématique de l'élasticité prévoit tous les faits. On reconnaît, en même temps, la portée pratique des méthodes d'analyse modernes et des idées géométriques, telles que la connexion des espaces.

## § X

Dans le § V nous avons déjà envisagé la double équation de Laplace. Elle joue un rôle considérable dans la théorie de l'élasticité et dans les derniers temps elle a été le sujet d'un grand nombre de recherches. L'Académie des Sciences de Paris a été saisie de l'importance des études sur cette équation. Le sujet du prix Vaillant pour 1907 a été mis sur cette équation.

Si nous supposons qu'un corps élastique ne soit pas sujet à des forces de masses les composantes des déplacements satisfont à la double équation de Laplace. Cela suffit pour montrer le lien qui existe entre cette équation et la théorie de l'élasticité. D'autre part la théorie de l'équilibre des plaques élastiques se ramène immédiatement à la double équation de Laplace à deux variables. Plusieurs voies s'ouvriraient pour en faire l'étude. L'application de la méthode de Green, dont nous avons déjà parlé, donnait d'un côté le moyen de résoudre beaucoup de questions. On pouvait aussi employer les équations intégrales comme M. Lauricella a montré, et comme nous verrons tout à l'heure. Mais il y avait aussi une autre méthode par laquelle on pouvait faire dépendre toute fonction biharmonique (c'est-à-dire qui satisfait à la double équation de Laplace) de deux fonctions harmoniques. Cette dernière méthode a aussi simplifié d'une manière frappante la résolution de plusieurs questions qui se rapportent à la théorie de l'élasticité.

Venske en 1891 avait publié sur ce sujet un beau travail; malheureusement il n'est pas exact dans toutes ses parties.<sup>17</sup> Almansi a traité de nouveau la question.<sup>18</sup> Le principe fondamental d'où il part est celui-ci: toute fonction biharmonique de trois variables  $x, y, z$  peut se décomposer en deux termes par la formule

$$(1) \quad \phi_1 + (ax + by + cz)\psi_1,$$

où bien par l'autre

$$(2) \quad \phi_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\psi_2,$$

$\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2$  étant des fonctions harmoniques et  $a, b, c$  des constantes. Des décompositions analogues ont lieu dans le cas des fonctions biharmoniques de deux variables. M. Goursat aussi est revenu sur ce sujet dans un court aperçu qu'il a donné de la question.

La présence du facteur linéaire ou du facteur de deuxième degré dans les formules précédentes explique la facilité avec laquelle on peut résoudre les problèmes de l'intégration de la double équation de Laplace étant donné les valeurs au contour de l'intégrale et de sa dérivée normale dans les cas où le contour est un plan ou une sphère. En effet on peut ramener immédiatement ces problèmes aux questions correspondantes des fonctions harmoniques.

De même les trois composantes des déplacements d'un corps élastique isotrope peuvent être mises sous la forme

$$\phi_1 + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \phi_2 + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\phi_3 + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

où les quatre fonctions  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi$  sont des fonctions harmoniques. Almansi a obtenu par-là la solution du problème de l'équilibre de la sphère élastique d'une manière directe et presque immédiate.<sup>20</sup>

Un autre résultat intéressant qu'on peut rattacher aux expressions (1) et (2) est le principe de l'inversion appliqué aux fonctions biharmoniques.<sup>21</sup> M. Levi-Civita l'avait trouvé par une autre voie pour le cas de deux variables,<sup>22</sup> et M. Michell aussi a étudié cette question.<sup>23</sup>

Mais l'application la plus élégante et la plus profonde des formules (1) et (2) a été faite par M. Almansi. Nous allons en dire un mot.

Le principe de la représentation conforme donne la solution de l'équation de Laplace à deux variables pour toutes les aires qu'on peut représenter dans un cercle, les valeurs au contour étant données. La question analogue pour la double équation de Laplace (c'est-à-dire la détermination de la fonction inconnue lorsqu'on connaît au contour ses valeurs et celles de la dérivée normale) a été résolue par M. Almansi pour toute aire qu'on peut représenter dans un cercle au moyen d'un polynôme rationnel et entier.<sup>24</sup>

Il n'y avait qu'à suivre la même route pour trouver un résultat tout-à-fait analogue dans le cas de l'équilibre élastique à deux variables, c'est-à-dire des membranes planes, c'est ce que M. Boggio a fait dans un travail intéressant.<sup>25</sup>

C'est ainsi, par exemple, que le problème de l'équilibre d'une membrane élastique tendue, le contour étant un colimaçon, de Pascal peut être résolu.

Ces résultats ne s'étendent pas à l'espace à trois dimensions, car il est bien connu que les représentations conformes dans cet espace sont limitées aux transformations par rayons réciproques; mais il faut remarquer que la méthode de Almansi embrasse des cas en dehors des cas classiques où le contour est formé par des cercles ou des droites. C'est pourquoi elle ouvre un nouveau champ de recherches.

Revenons encore une fois à la méthode de Green, appliquée à la double équation de Laplace.

On peut former une fonction analogue à celle de Green même dans ce cas.

C'est une fonction biharmonique dont les valeurs et celles de la dérivée normale vérifient certaines conditions au contour. MM. Lauricella et Boggio l'ont employée dans plusieurs cas. M. Hadamard a envisagé cette fonction d'un nouveau point de vue. Il l'a regardée comme dépendante de la forme du contour, c'est-à-dire comme une fonction des surfaces ou des lignes dont il est constitué. De cette manière il s'est rattaché à la conception dont nous avons parlé dans la leçon précédente, et il s'est proposé le problème des maxima et des minima en considérant le contour variable. Cette recherche conduite d'une manière tout-à-fait nouvelle et par des méthodes très élégantes constitue une partie très originale et très intéressante de son beau et fondamental travail.<sup>26</sup>

## § XI

Il serait impossible d'abandonner le champ des recherches dont nous avons parlé jusqu'à présent sans toucher à une question qui a été le sujet d'un grand nombre de travaux dans les derniers temps.

C'est la question des théorèmes d'existence. Ces théorèmes en général n'intéressent guère les physiciens qui ne s'en soucient pas, tandis qu'ils sont regardés comme fondamentaux par les mathématiciens qui tâchent, dans leurs théories, de bâtir des

ensembles logiques de propositions. Les énoncés des théorèmes d'existence semblent, au premier abord, justifier ce dualisme, car il se réduisent, dans la plupart des cas, à constater que, certaines conditions étant données, il y a des solutions. Mais, si l'on regarde de plus près, on reconnaît que bien des fois on se trompe en ne les appréciant pas. En effet pour en donner les démonstrations il faut souvent construire effectivement les solutions dans les cas les plus généraux. C'est pourquoi ces démonstrations sont la source de résultats qui intéressent beaucoup les applications et ont une importance théorique et pratique. Nous verrons cela en envisageant dans le même temps ces théorèmes et les solutions générales. Comme il est bien connu ces questions ont présenté beaucoup de difficultés.

Les voies qu'on a tenu pour l'élasticité se rapprochent de celles qu'on avait suivies pour l'équation de Laplace. L'application de la méthode de Neumann a été tentée d'abord par M. Lauricella en partant des formules de M. Somigliana.<sup>27</sup> Mais le résultat qu'il a obtenu, à cause des hypothèses qu'il fallait faire sur les coefficients, ne rentrait pas dans le problème réel de l'élasticité. Ensuite il s'est toujours plus rapproché de la solution définitive de la question, en se servant de toutes les ressources que lui offrait l'analyse, par les méthodes des approximations successives et des équations intégrales.

La méthode des approximations successives employée par M. Korn<sup>28</sup> a eu beaucoup de succès. Ce géomètre a développé la solution par des séries de puissances d'un paramètre qui dépend des constantes de l'élasticité, et il a résolu ainsi le problème de l'équilibre, soit dans le cas où les déplacements sont données au contour, soit dans le cas où les tensions sont données.

Il faut remarquer que, jusqu'à présent, la méthode de M. Korn est la seule qui ait amené à une solution complète dans ce dernier cas. La manière élégante par laquelle il a su vaincre la difficulté qui se présentait est remarquable aussi.

En effet si l'on pose les équations de l'élasticité sous la forme

$$\Delta^2 u + K \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \Delta^2 v + K \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \Delta^2 w + K \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

et l'on suppose que les tensions aux contour soient données, les développements de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , en séries de puissances de  $K$ , ont un

point de singularité essentielle pour  $K=0$ . MM. E. et F. Cosserat avait déjà remarqué cette propriété dans la cas particulier de la sphère.<sup>29</sup>

C'est pourquoi pour arriver au but M. Korn a envisagé des séries de puissance dans les domaines de  $K=1$ .

Depuis quelques années on a abordé ces questions par la méthode des équations intégrales.

L'idée fondamentale très importante développée par M. Fredholm a été d'envisager une fonction harmonique définie dans un domaine à deux dimensions comme le potentiel d'une double couche distribuée sur le contour.<sup>30</sup>  $u(s_1)$  étant la valeur de la fonction harmonique dans un point  $s_1$  de la frontière  $s$ , et  $f(s)$  étant la densité de la double couche, on a la relation

$$u(s_1) = \pi f(s_1) + \int_s f(s) F(s, s_1) ds$$

où  $F(s, s_1)$  est une fonction régulière, si le contour est régulier. La détermination de la fonction  $f(s)$  est donc ramenée à la résolution de l'équation intégrale précédente. Nous parlerons de cette résolution dans la leçon suivante. C'est par des procédés fondés sur les mêmes principes que l'on peut traiter le cas de l'élasticité. On est amené par-là à des systèmes d'équations intégrales. Les difficultés qu'on remonte ressortent des infinis des fonctions qui paraissent sous les intégrales, et elles n'ont pas encore été vaincues lorsque les tensions sont données.

MM. Fredholm, Lauricella, Boggio, Marcolongo ont publié des savants travaux sur ce sujet, et il faut aussi rappeler les noms de MM. E. et F. Cosserat qui ont été les premiers à établir d'intéressantes relations intégrales.<sup>31</sup>

La double équation de Laplace peut aussi se résoudre par des méthodes analogues. M. Korn a employé les approximations successives,<sup>32</sup> M. Lauricella les méthodes des équations intégrales,<sup>33</sup> mais il faut supposer que le contour n'ait pas des points singuliers.

Prenons le cas particulier de deux variables, en supposant que le contour soit un rectangle, ce qui correspond au problème de l'équilibre d'une plaque élastique rectangulaire. Le problème n'est pas abordable par les méthodes précédentes. M. Lauricella l'a résolu en revenant aux anciennes méthodes, dont Mathieu s'était servi pour étudier l'équilibre du prisme rectangle. Ces méthodes se rattachent à celles des solutions simples.

## § XII

Nous finirons cette leçon en consacrant quelques mots à la méthode générale des solutions simples, dont nous venons de parler dans l'article précédent qui a été aussi renouvelée tout récemment par des fécondes applications des équations intégrales.

On en trouve les premières traces dans les tentatives par lesquelles on a abordé les équations différentielles aux dérivées partielles. La solution de la forme  $f(t)\phi(x)$  de l'équation des cordes vibrantes  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , où les variables sont séparées, appartient à Taylor.

C'est le premier exemple d'une solution simple. La composition des solutions simples du type de Taylor a amené à la série de Fourier. Je ne reproduirai pas ici l'histoire si bien connue de cette découverte où les conceptions physiques et analytiques s'entrelacent et où paraissent les noms célèbres de Bernoulli, d'Alembert, Euler, Lagrange. La méthode des solutions simples, dont nous venons de donner le type, consiste à trouver des solutions particulières où toutes les variables, ou quelques-unes, sont séparées. Ensuite en construisant une série de solutions simples on peut obtenir la solution générale par le calcul des coefficients. Cette méthode peut s'appliquer aux différents types d'équations différentielles qu'ils soient elliptiques, paraboliques ou hyperboliques.

Pour fixer les idées considérons ces dernières équations, et en particulier le cas des vibrations des membranes planes fixées au contour. Dans le monde à trois dimensions qu'il faut envisager, séparons le temps  $t$  des coordonnées de l'espace  $x, y$ , et puisque l'équation différentielle qu'il faut intégrer est,

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

examinons les solutions ayant la forme

$$f(t)\phi(x, y).$$

On a tout de suite que  $\phi$  doit vérifier l'équation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K\phi = 0,$$

$\phi$  étant nulle au contour et  $K$  étant une constante. Il faut commencer par trouver les valeurs de  $K$  pour lesquels existent

des solutions  $\phi$  qui ne sont pas nulles. Ce sont les valeurs exceptionnels. L'existence de la plus petite valeur exceptionnelle avait été prouvée par M. Schwarz, mais c'est dans le grand mémoire de M. Poincaré sur les équations de la physique mathématique<sup>34</sup> qui a été démontré l'existence de toutes les valeurs exceptionnelles. On peut les regarder comme les racines d'une équation transcendante. Le principe de Lord Rayleigh ne donnait qu'un aperçu de la manière dont les choses se passaient par une extension de la théorie classique des petites vibrations.

Mais ce sont les méthodes des équations intégrales qui ont conduit aux résultats les plus simples et les plus directs.

En effet, on voit facilement, que l'on peut remplacer l'équation différentielle homogène (4), ainsi que la condition  $\phi = 0$  au contour, par une équation intégrale linéaire homogène. Comme nous verrons dans la leçon suivante, une équation intégrale linéaire n'est que le cas limite d'un système d'équations linéaires algébriques, lorsque le nombre des équations et des inconnues croît indéfiniment. C'est pourquoi la condition pour que l'équation intégrale linéaire et homogène soit satisfaite par une solution qui ne soit pas nulle, se trouve en annulant une expression que l'on peut regarder comme la limite du déterminant d'un système d'équations algébriques linéaires. Cette expression, que M. Fredholm a appelé le déterminant,<sup>35</sup> est une fonction entière de  $K$ , et on a par là que les valeurs exceptionnelles sont les racines d'une équation transcendante.

Les valeurs  $\phi$  qui vérifient l'équation (4) et qui correspondent aux valeurs exceptionnelles de  $K$  sont les solutions exceptionnelles. Il faut tâcher d'exprimer la solution générale par une série de solutions exceptionnelles, en généralisant la méthode de Fourier.

M. Hilbert,<sup>36</sup> M. Schmidt,<sup>37</sup> et d'autres auteurs ont traité et approfondi d'une manière générale ces questions. M. Hilbert a pris comme point de départ l'étude des formes infinies, en les réduisant à la forme canonique. Il n'est possible ici de développer ces recherches qui constituent un nouveau et intéressant chapitre de l'analyse.

<sup>1</sup> Voir la citation dans la note 4 de la leçon précédente.

<sup>2</sup> *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.* Acta Math. T. 18.

<sup>3</sup> *Teoria dell' elasticità.* N. Cimento, 1872-1873.



- <sup>4</sup> *Sulle equazioni dell'elasticità.* Annali di Mat. S. II, T. XVII.
- <sup>5</sup> *Zur Theorie der Lichtstrahlen.* Sitz. ber. d. Acad. d. Wiss. zu Berlin, 1882.
- <sup>6</sup> *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles.* Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, T. III.
- <sup>7</sup> *Sul principio di Huygens.* Rend. Ist. Lombardo, S. II, T. XXII. 1889.
- <sup>8</sup> *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* Rend. Acc. dei Lincei, S. V. Vol. I. 2° Sem.
- <sup>9</sup> Voir la citation dans la note 2.
- <sup>10</sup> *Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Acta Math. T. 31.
- <sup>11</sup> *Sulle vibrazioni dei corpi solidi omogenei isotropi.* Mem. Acc. di Torino, S. II, T. 47.
- <sup>12</sup> *The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium.* Proc. of the London Math. Soc. 1904.
- <sup>13</sup> *Sopra alcune formule fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi.* Atti. Acc. di Torino, 1907.
- <sup>14</sup> COULON, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques.* Paris, 1902.
- <sup>15</sup> *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes.* Annales de l'école normale supérieure de Paris, 1907.
- <sup>16</sup> *Le tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra e la conseguente doppia rifrazione accidentale.* Rend. Acc. dei Lincei, Vol. 18, 1° Sem. 1909.
- I fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra.* Rend. Acc. dei Lincei, Vol. 18, 1° Sem. 1909.
- <sup>17</sup> *Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen aus dem Jahre* 1891.
- <sup>18</sup> *Sulla integrazione della equazione differenziale,  $\Delta^{2n} = 0$ .* Ann. di Mat. S. III, T. II.
- <sup>19</sup> *Sur l'équation  $\Delta\Delta u = 0$ .* Bull. de la Société Math. de France.
- <sup>20</sup> *Sulla deformazione della sfera elastica.* Mem. Acc. di Torino, S. II, T. 47. 1897.
- <sup>21</sup> *Sulle funzioni poliarmoniche.* Atti dell'Istituto Veneto, T. 57.
- <sup>22</sup> *Sopra una trasformazione in sé stessa della equazione  $\Delta\Delta = 0$ .* Atti dell'Istituto Veneto, T. IX, S. VII.
- <sup>23</sup> London Math. Soc. Proc. 1902.
- <sup>24</sup> *Sulla ricerca delle funzioni poliarmoniche in un'area piana semplicemente connessa, per date condizioni al contorno.* Circolo Mat. di Palermo, T. XIII. 1899.
- <sup>25</sup> *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane.* Atti Acc. di Torino, T. XXXV. 1899-1900.
- <sup>26</sup> Voir la citation de la note 8 de la leçon précédente. Le travail de M.

Hadamard a été couronné par l'Académie des Sciences ainsi que ceux de MM. Lauricella, Korn, et Boggio que nous citerons après.

<sup>27</sup> *Equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Ann. Scuola Normale di Pisa, Vol. VII. 1895.

<sup>28</sup> *Sur les équations de l'élasticité.* Annales de L'École normale supérieure, T. XXIV. 1907.

*Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface.* Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1908.

<sup>29</sup> *Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique soumis à des forces données.* Comptes rendus de l'Ac. des Sciences, 1901.

<sup>30</sup> *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet.* Vetenskaps-Akad. Stockholm, 1900.

<sup>31</sup> La littérature sur ce sujet est très étendue. Le mémoire de M. Fredholm : *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* est publié dans Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Vol. II. 1906.

Pour les autres je renvoie aux : Rendiconti Acc. dei Lincei N. Cimento, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, etc.

<sup>32</sup> *Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* Annales de l'école normale supérieure, 1908.

<sup>33</sup> *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* Acta Math. T. 32. 1909.

<sup>34</sup> *Circolo Mat. di Palermo*, Vol. VIII. 1894.

<sup>35</sup> *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* Acta Math. T. 27. 1903.

<sup>36</sup> *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Göttingen-Nachrichten, 1904, 1905, 1906.

<sup>37</sup> *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.* Math. Annalen, Bd. 63, 64. 1907.

## TROISIÈME LEÇON

§ I. La loi de Hooke n'est pas rigoureuse. L'état d'un système dépend de toute l'histoire antécédente. — § II. Distinction entre la mécanique de l'hérédité et la mécanique de la non hérédité. — § III. Exemple de la torsion d'un fil. — § IV. Expression analytique des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction. — § V. Hérédité linéaire. Questions générales sur l'hérédité. — § VI. Les équations intégrales et les systèmes des équations de premier degré. — § VII. Cycles fermés et invariabilité de l'hérédité. Principe du cycle fermé. — § VIII. Oscillations dues à la torsion. Les équations intégral-différentielles. — § IX. Cas général de l'élasticité en ayant égard à l'hérédité. — § X. Équations de l'électro-magnétisme en ayant égard à l'hérédité. — § XI. Extension de la méthode de Green. — § XII. Méthodes pour la solution des équations intégral-différentielles de l'élasticité dans le cas des phénomènes de l'hérédité. Rôle de la nouvelle analyse.

### § I

La loi de Hooke, qui est la base de la théorie mathématique ordinaire de l'élasticité, est une loi approximative. Nous avons déjà touché à cela dans la leçon précédente. On peut tâcher de se rapprocher des résultats de l'observation en la modifiant de deux manières différentes. En effet on peut penser d'abord que les phénomènes de l'élasticité s'éloignent de la loi de Hooke, parce-que celle-ci établit des relations linéaires entre le *strain* et le *stress*, tandis que ces éléments sont effectivement liés entre eux par des relations qui ne sont pas linéaires.

Mais un examen approfondi des phénomènes nous montre que les modifications qu'on pourrait introduire en suivant cette idée ne sont pas suffisantes, car la loi de Hooke s'éloigne des faits naturels par d'autres raisons encore.

Envisageons les phénomènes de l'élasticité résiduelle (*elastische Nachwirkung*). Un corps élastique, lorsqu'il est assujéti à des actions extérieures, ne prend pas une forme définitive d'équilibre, mais il change lentement et tend d'une manière asymptotique vers une certaine forme. De même, lorsque les forces extérieures ont cessé d'agir, le corps élastique ne revient pas immédiatement à la forme naturelle, mais la forme qu'il prend change lentement avec des lois déterminées.

Ces phénomènes prouvent que, à chaque instant, le strain dépend, outre que du stress actuel, des stress qui ont sollicité le corps dans les temps antécédents. C'est pourquoi toute relation qu'on pourrait imaginer existant à chaque instant entre strain et stress actuels ne pourrait pas les représenter. Il faut donc modifier la loi de Hooke en partant du principe que l'état actuel du système élastique dépend de l'histoire des efforts qui l'ont sollicité.

## § II

Avant d'approfondir la question nous allons dire un mot sur la dénomination qu'on peut donner aux phénomènes que nous avons envisagés. Il faut dire d'abord qu'on en trouve des analogues dans le magnétisme, dans l'étude des corps diélectriques, et dans d'autres cas aussi. Les dénominations de *hysteresis*, de *trainage* et d'autres, dont plusieurs auteurs ont fait usage, peuvent donner lieu à des malentendus en les employant dans le cas général. C'est pourquoi nous désignerons tous ces phénomènes par les mots : *phénomène d'hérédité*. Nous nous rattacherons par-là à la classification de la mécanique en *mécanique de l'hérédité* et *mécanique de la nonhérédité*.

M. Picard, dans un bel article qu'il a écrits sur la mécanique classique et ses approximations successives, remarque que l'on peut faire cette classification.<sup>1</sup> La mécanique de la non-hérédité est celle où l'avenir d'un système ne dépend, à un instant donné, que de son état actuel, ou, d'une manière plus générale (si l'on regarde les forces comme pouvant aussi dépendre des vitesses) de l'état actuel et de l'état infiniment voisin qui précède. La mécanique de l'hérédité est celle où chaque action laisse un héritage dans le système, et l'état actuel dépend de toute l'histoire précédente.

Il est évident que le problème fondamental de l'astronomie appartient à la première classe, tandis que les questions auxquelles nous venons de toucher dans l'article précédent appartiennent à la seconde. M. Painlevé dans un chapitre intéressant consacré à la mécanique<sup>2</sup> soutient que, sous un certain point de vue, les problèmes de nature héréditaire ne sont que des problèmes apparents, parce qu'ils ne se présenteraient pas, si l'on avait une connaissance plus parfaite de la constitution des corps. Toujours est-il que, dans le moment actuel, il est nécessaire de les examiner et de les appro-

fondir. Dans certains cas les équations auxquelles ils amènent ont été connues depuis longtemps. Il me suffit pour cela de rappeler le beau mémoire sur l'élasticité publié par Boltzmann en 1874<sup>3</sup> où les équations sont posées, sous certaines conditions, en partant de vues empiriques, et l'intéressant travail de M. Wiechert<sup>4</sup> fondé sur d'autres conceptions qui a paru après. Je dirai sous peu quelles étaient les difficultés qui se présentaient pour une étude générale de ces équations, et je montrerai que, jusqu'aux derniers temps, il n'y avait pas une analyse qui permettait de les traiter d'une manière générale et complète.

### § III

Pour envisager d'abord les choses d'une manière élémentaire, considérons la torsion d'un fil.

Soit  $\omega$  l'angle de torsion et  $M$  soit le moment de torsion.

Dans la théorie ordinaire de l'élasticité la loi de Hooke nous amène à regarder  $\omega$  comme proportionnel à  $M$ .

Cela s'écrit par l'équation

$$(1) \quad \omega = KM,$$

où  $K$  est un coefficient constant. De cette manière on établit une relation approchée ayant lieu à chaque instant entre la torsion et l'action extérieure. Si l'on écrivait en général

$$\omega = F(M),$$

où  $F$  est le symbole d'une fonction, on pourrait déterminer la fonction  $F$  de sorte que la représentation analytique du phénomène fût plus approchée. C'est ainsi qu'en développant, par exemple, la fonction  $F$  dans une série de puissances on trouverait

$$\omega = KM + K_1 M^2 + K_2 M^3 + \dots$$

et l'on pourrait essayer d'avoir une approximation plus grande que par la formule (1) en prenant un certain nombre de termes et en déterminant par des méthodes connues les coefficients  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ , ... Mais de cette manière on négligerait le phénomène de l'hérédité, car, en établissant une relation entre la torsion actuelle et l'action extérieure actuelle, les actions antécédentes n'entreraient pas en jeu.

Si l'on veut donc que  $\omega$  dépende de l'histoire du moment de torsion  $M$  il faudra corriger l'équation (1) en écrivant

$$\omega = KM + \phi,$$

où  $\phi$  est une quantité qui dépend de toutes les valeurs prises par  $M$  depuis le temps  $-\infty$  jusqu'à l'instant actuel. On peut simplifier si l'on néglige les actions qui ont été exercées avant un certain instant  $t_0$ , car alors  $\phi$  sera une quantité qui dépendra de toutes les valeurs prises par  $M$  depuis l'instant  $t_0$  jusqu'à l'instant actuel. En représentant le temps par l'abscisse et le moment de torsion par l'ordonnée d'une courbe on aura une image géométrique de la fonction  $M(t)$ , et, par suite, on pourra dire que  $\phi$  dépend de la forme de la courbe qu'on a obtenu. On arrive par là à une conception tout-à-fait analogue à celle que nous avons examinée dans la première leçon. Souvenons-nous en effet que lorsqu'on a voulu étendre le principe de l'action variée on a été obligé de considérer une intégrale double comme une quantité qui dépend de la ligne qui forme le contour du domaine d'intégration, et, en général, de toutes les valeurs que certaines fonctions prennent le long de cette ligne.

Nous pouvons mettre en rapport maintenant ce que nous venons de dire avec ce que nous avons exposé dans la première leçon.

Dans le § V, nous avons envisagé un ensemble infini et continu de variables. Nous avons montré que ces considérations ont origine de la conception des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction ou de plusieurs fonctions, et nous avons parlé de leur liaison avec les équations intégrales. On comprend donc que c'est en se rattachant à cette théorie qu'on pourra atteindre la solution des problèmes qui se présentent dans la mécanique de l'hérédité.

Mais on peut ajouter dès ce moment, que les équations intégrales ne suffisent pas pour embrasser le cas général des problèmes de l'hérédité.

Il faut passer à des questions tout-à-fait nouvelles beaucoup plus compliquées, que j'appelle les problèmes des *équations intégrales-différentielles*.

Ces problèmes sont d'une nature différente de ceux qui se présentent dans l'extension de l'équation de Jacobi que nous avons traitée dans la première leçon (§§ IV, V). Alors nous avons rencontré des relations entre les coefficients différentielles des fonctions des lignes (les équations (4) de la première leçon), tandis que les équations intégrales-différentielles que nous trouverons dans les articles suivants sont des relations qui, en même temps, ont le type des équations différentielles et celui

des équations intégrales. En outre l'union des deux types est telle que les méthodes connues qu'on emploie pour les équations différentielles et pour les équations intégrales ne donnent pas la solution, dans les cas généraux, si on les applique séparément. Le problème des équations intégral-différentielles se distingue d'une manière essentielle de ceux des équations différentielles et des équations intégrales. Pour le résoudre il faut accoupler les deux méthodes par une nouvelle analyse.

#### § IV

Revenons maintenant à la quantité  $\phi$  qui dépend de toutes les valeurs de la fonction  $M(t)$  depuis la valeur  $t_0$  jusqu'à la valeur actuelle  $t$ . La première question qui se pose est évidemment celle-ci : Peut-on exprimer analytiquement cette relation ? Pour répondre il faut examiner la question générale de la représentation analytique d'une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction (1ère leçon, § V). On se heurte ainsi à des difficultés analogues à celles qu'on rencontre dans l'analyse ordinaire lorsque, après avoir défini une fonction de la manière de Dirichlet, on veut passer à son expression analytique, par exemple à la série de Taylor. Il n'est pas nécessaire que je rappelle qu'il faut poser des conditions relatives à la dérivabilité, à la convergence et au reste de la série, pour que le développement soit possible.

De même dans le cas d'une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction, en posant certaines conditions d'un type analogue, on peut arriver à un développement qui est tout-à-fait semblable à celui de Taylor.

En l'appliquant à  $\phi$  qui dépend de  $M(t)$  on trouve

$$(2) \quad \phi = \int_{t_0}^t M(\tau) \phi(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^t d\tau_2 M(\tau_1) M(\tau_2) \phi(t, \tau_1, \tau_2) + \dots$$

Avant de continuer nous allons fixer notre attention sur la portée de l'extension du théorème de Taylor dont nous venons de parler. En effet il est le premier exemple de l'application du passage à l'ensemble infini et continu des variables d'une fonction et par suite il a été le point de départ des idées successives. Je vais montrer que ce développement n'est autre chose que le cas limite de la série de Taylor à plusieurs variables si l'on suppose que le nombre de celles-ci croît indéfiniment. On le verra aisément en suivant la voie par laquelle j'y suis arrivé en 1887.<sup>5</sup>

Divisons l'intervalle  $(t_0, t)$  en  $n$  parties  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , et soient  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , respectivement les valeurs de la fonction  $M(t)$  pour les valeurs de  $t$  comprises entre les intervalles

$$(t_0, t_0 + h_1), (t_0 + h_1, t_0 + h_1 + h_2) \dots (t_0 + h_1 + \dots + h_{n-1}, t).$$

Envisageons d'abord une fonction de  $h_1 M_1, h_2 M_2, h_3 M_3 \dots h_n M_n$  qui s'annule lorsque ces quantités sont nulles. Si nous développons cette fonction en série de Taylor (les conditions pour la possibilité de ce développement étant satisfaites) nous trouverons l'expression

$$\sum_i h_i M_i G_i + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_i h_i M_i \sum_j h_j M_j G_{ij} + \dots$$

Passons maintenant à la limite, en faisant croître indéfiniment le nombre des intervalles  $h_1, h_2 \dots h_n$ , et en faisant diminuer indéfiniment la grandeur de chacune. Le premier terme qui est constitué par une somme simple, donnera lieu à la limite à une intégrale simple, le second terme qui est constitué par une somme double deviendra à la limite une intégrale double, et les sommes successives deviendront des intégrales multiples d'un ordre toujours croissant. On arrive de cette manière au développement précédent (2). Ce que nous venons d'exposer n'est que le schéma du raisonnement. C'est par des artifices qui sont assez compliqués qu'il devient complet et rigoureux.

Le développement d'une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction, que nous venons de trouver, conduit facilement à une classification analogue à celle des fonctions des différents degrés.

Il suffit pour cela de séparer les termes de la série (2) et l'on aura évidemment des expressions de premier, de deuxième, de troisième degré. Un grand nombre de questions s'y rattachent, et les plus intéressantes sont celles où les fonctions dont dépendent ces expressions sont inconnues. C'est par ces considérations que j'ai été amené depuis 1896<sup>6</sup> à l'étude de la solution des équations intégrales en posant comme fondement une conception analogue à celle qui m'avait conduit au développement (2), c'est-à-dire à la conception fondamentale du calcul intégral. En effet, comme j'ai montré dans ma première Note de 1896<sup>7</sup> et comme nous avons annoncé dans la première leçon (voir le § V), leur solution découle de l'extension du procédé pour la résolution des équations algébriques, lorsqu'on suppose que le



nombre des variables croît indéfiniment de la même manière avec laquelle croît le nombre des termes d'une somme pour donner lieu à une intégrale.

Nous allons le voir dans le § prochain.

## § V

Si nous appliquons le développement (2) l'équation fondamentale de la torsion deviendra :

$$\omega = KM(t) + \int_{t_0}^t M(\tau) \phi(t, \tau) d\tau \\ + \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 M(\tau_1) M(\tau_2) \phi(t, \tau_1, \tau_2) + \dots$$

Il est évident que nous considérerons l'histoire complète du moment de torsion en prenant pour limite inférieure des intégrales  $t_0 = -\infty$ .

Admettons maintenant que, dans une première approximation, on puisse négliger tous les termes du développement (2) de  $\phi$ , le premier excepté, alors l'équation précédente deviendra

$$(3) \quad \omega(t) = KM(t) + \int_{t_0}^t M(\tau) \phi(t, \tau) d\tau.$$

Ce sera donc une relation linéaire qui rattachera toujours les deux quantités  $\omega$  et  $M$ , mais cette relation aura perdu le type algébrique (1), en devenant, à cause de l'hérédité, une relation de type intégrale. La relation étant linéaire on peut l'interpréter, au point de vue physique, par la propriété que les effets de la superposition des moments de torsion se somment. En effet, si l'on suppose que cette propriété soit vérifiée, l'équation précédente en découle comme conséquence. C'est à cause de cela que nous appellerons *hérédité linéaire* celle que nous considérons.

Je vais maintenant énoncer les problèmes qui se posent, dès que la question particulière que nous avons étudiée, a été mise sous la forme précédente.

- (1) Quelle est l'interprétation du coefficient  $\phi(t, \tau)$  ?
- (2) La fonction  $\phi(t, \tau)$  étant connue, comment peut-on déterminer  $M(t)$  lorsqu'on donne  $\omega(t)$  ?
- (3) Comment peut-on déterminer la fonction  $\phi(t, \tau)$  si l'on suppose qu'elle soit inconnue ?
- (4) Est-il possible d'étendre les conceptions précédentes relatives à la torsion, au cas général de l'élasticité ?

(5) Est-il possible de les étendre aux phénomènes magnétiques et diélectriques ?

(6) Quels phénomènes rentreront dans le cadre des solutions qu'on trouvera ?

Nous allons discuter très rapidement ces différents problèmes.

### § VI

Il n'y a pas de difficulté pour répondre à la première question. En effet on voit aisément que  $\phi(t, \tau)$  mesure la torsion qui est induite au temps  $t$  par un moment de torsion égal à l'unité qui s'est exercé dans l'intervalle de temps  $(\tau, \tau + d\tau)$ . C'est à cause de cela qu'il faudra supposer que  $\phi(t, \tau)$  décroisse lorsque  $t - \tau$  croît. Nous supposerons aussi que  $\phi(t, \tau)$  soit infiniment petit pour  $t - \tau$  infiniment grand. En outre si nous prenons comme infini principal  $t - \tau$  nous ferons l'hypothèse que  $\phi(t, \tau)$  soit infiniment petit d'ordre  $1 + \epsilon$  où  $\epsilon > 0$ . C'est ainsi que l'intégrale

$$\int_{t_0}^t M(\tau) \phi(t, \tau) d\tau$$

sera convergente si la limite inférieure  $t_0$  sera  $-\infty$ .

Nous appellerons  $\phi(t, \tau)$  le *coefficient d'hérédité*.

Passons maintenant à la seconde question que nous avons posée dans l'article précédent. Il faut résoudre l'équation (3) en supposant  $M(t)$  inconnue, toutes les autres quantités étant connues. On trouve ainsi ce qu'on appelle une équation intégrale.

En montrant comment on peut arriver à la résoudre nous exposerons les principes généraux par lesquels on peut résoudre toutes les équations intégrales analogues. Comme nous avons dit dans le § précédent ces principes sont tout-à-fait analogues à ceux que nous avons employés précédemment pour l'extension du développement en série de Taylor. Voici la voie qu'il faut suivre. Supposons pour simplifier  $K=1$ . Divisons l'intervalle  $(t_0, t)$  en  $n$  parties  $h_1, h_2, \dots, h_n$  et soient  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ,  $n$  valeurs de  $t$  comprises dans ces intervalles.

Écrivons les équations

$$(4) \quad \begin{cases} \omega(t_1) = M(t_1), \\ \omega(t_2) = h_1 M(t_1) \phi(t_2, t_1) + M(t_2), \\ \omega(t_3) = h_1 M(t_1) \phi(t_3, t_1) + h_2 M(t_2) \phi(t_3, t_2) + M(t_3), \\ \omega(t_n) = h_1 M(t_1) \phi(t_n, t_1) + h_2 M(t_2) \phi(t_n, t_2) + \dots + \\ \quad h_{n-1} M(t_{n-1}) \phi(t_n, t_{n-1}) + M(t_n). \end{cases}$$

On aura un système de  $n$  équations avec les  $n$  inconnues  $M(t_1), M(t_2) \dots M(t_n)$ . Il est évident que si nous passons à la limite, en faisant diminuer indéfiniment  $h_1, h_2, \dots h_n$ , les équations précédentes se réduisent à l'équation intégrale (3). Donc pour résoudre cette équation intégrale résolvons d'abord le système des équations algébriques (4), et après, dans la solution, passons à la limite, en faisant diminuer indéfiniment  $h_1, h_2, \dots h_n$ . On aura de cette manière très-aisément la solution de l'équation intégrale.

Or, dans le cas que nous avons sous les yeux, une circonstance favorable se présente, c'est-à-dire, le déterminant qui paraît au dénominateur est égal à 1. C'est pourquoi la solution aura une forme simple, car il ne faudra calculer que les déterminants qui sont aux numérateurs en appliquant les règles ordinaires, et chercher après leurs limites. On trouvera évidemment des formules résolutive ayant la forme

$$M(t_1) = \omega(t_1),$$

$$M(t_2) = h_1 \omega(t_1) A_{21} + \omega(t_2),$$

$$M(t_3) = h_1 \omega(t_1) A_{31} + h_2 \omega(t_2) A_{32} + \omega(t_3),$$

$$M(t_n) = h_1 \omega(t_1) A_{n1} + h_2 \omega(t_2) A_{n2} + \dots + h_{n-1} \omega(t_{n-1}) A_{n, n-1} + \omega(t_n).$$

Pour calculer les coefficients  $A_{ij}(i, j = 1, 2, \dots n)$  prenons les déterminants qui les expriment en fonction des quantités  $\phi(t_i, t_j)$  et écrivons séparément les termes de 1<sup>o</sup> degré, de 2<sup>o</sup> degré, de 3<sup>o</sup> degré, etc. On trouve ainsi d'abord  $\phi(t_i, t_j)$  et après des sommes simples, doubles, triples, etc. Si nous faisons maintenant décroître indéfiniment les intervalles  $h_1, h_2, \dots h_n$  on a à la limite, que ces différentes sommes deviennent des intégrales simples, doubles, triples, etc.

La formule résolutive qu'on trouve de cette manière, sera

$$M(t) = \omega(t) + \int_0^t \omega(\tau) \psi(t, \tau) d\tau,$$

où

$$\begin{aligned} \psi(t, \tau) = & -\phi(t, \tau) + \int_\tau^t \phi(\tau, \xi) \phi(\xi, t) d\xi \\ & - \int_\tau^t \phi(\tau, \xi) d\xi \int_\xi^t \phi(\xi, \xi_1) \phi(\xi_1, t) d\xi_1 \\ & + \int_\tau^t \phi(\tau, \xi) d\xi \int_\xi^t \phi(\xi, \xi_1) d\xi_1 \int_{\xi_1}^t \phi(\xi_1, \xi_2) \phi(\xi_2, t) d\xi_2 \\ & - \dots \end{aligned}$$



vérifiée, quel que soit la période du moment de torsion, on démontre que  $\phi(t, \tau)$  doit être une fonction de la différence  $t - \tau$ . Réciproquement on prouve que, lorsque  $\phi(t, \tau)$  est une fonction de la différence  $t - \tau$ ,  $A$  décrit un cycle fermé, si  $M$  change d'une manière périodique.<sup>9</sup>

Or,  $\phi(t, \tau)$  étant une fonction de  $t - \tau$ , cela signifie que la torsion induite après un certain temps par un moment donné de torsion dépend de la grandeur de cette intervalle de temps et ne dépend pas de l'instant où le moment a été appliqué. Cette propriété peut s'appeler *l'invariabilité de l'hérédité*, d'où l'on tire le théorème que la propriété du cycle fermé amène comme conséquence celle de l'invariabilité de l'hérédité et réciproquement. C'est pourquoi on peut regarder les deux propriétés comme équivalentes. J'appelle le théorème précédent le *principe du cycle fermé*.

Or, si  $\phi(t, \tau) = \phi(t - \tau)$ , l'équation intégrale

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{t_0}^t M(\tau) \phi(t, \tau) d\tau,$$

se transforme facilement dans l'autre

$$\omega(t) = KM(t) + \int_0^{t-t_0} \tilde{M}(t - \xi) \phi(\xi) d\xi,$$

et, par la méthode que nous avons donnée pour la résolution des équations intégrales, on pourra déterminer le coefficient d'hérédité  $\phi(\xi)$ , lorsqu'on connaît  $M(t)$  et  $\omega(t)$ .

C'est ainsi que la troisième question est résolue. Donc l'analyse ordinaire des équations intégrales suffit pour les problèmes que nous avons traités jusqu'ici.

## § VIII

Nous montrerons sous peu qu'il est nécessaire d'employer l'analyse des équations intégro-différentielles si l'on veut étendre à des cas généraux les considérations particulières que nous avons développées. Cependant, avant d'aborder cette extension, il sera utile de faire une première rencontre des équations de ce type sans abandonner le problème particulier de la torsion, toutefois nous ne considérerons plus la torsion au point de vue statique, comme nous avons fait jusqu'ici. Nous examinerons la question dynamique, c'est-à-dire celle des oscillations du fil. Il est évident que, pour passer du cas statique au cas dyna-

mique, il suffit, par le principe de d'Alembert, de remplacer le moment  $M$  de torsion par la différence  $M - \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$ ,  $\mu$  étant une quantité constante. On trouve alors

$$(5) \quad \omega(t) = K \left[ M(t) - \mu \frac{\partial^2 \omega(t)}{\partial t^2} \right] + \int_{t_0}^t \left[ M(\tau) - \mu \frac{\partial^2 \omega(\tau)}{\partial \tau^2} \right] \phi(t, \tau) d\tau.$$

On peut remplacer cette équation par l'équation réciproque que l'on a par la résolution de l'équation intégrale,

$$M(t) - \mu \frac{\partial^2 \omega(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{K} \omega(t) + \int_{t_0}^t \omega(\tau) \chi(t, \tau) d\tau.$$

Commençons par fixer notre attention sur la nature de l'équation que nous venons de trouver. Elle est en même temps une équation différentielle et une équation intégrale, car si nous prenons  $\omega(t)$  pour inconnue, cette fonction paraît sous une intégrale définie et elle est aussi dérivée deux fois par rapport à  $t$ . Cette équation est donc du type *intégro-différentiel*. Mais on peut démontrer que, dans cette équation intégro-différentielle particulière, on élimine les dérivées en appliquant deux fois l'intégration par rapport à  $t$  et on peut ainsi la transformer dans une équation intégrale ordinaire.

C'est à cause de cela qu'on peut appeler cette équation une équation *intégro-différentielle apparente*, parce que sa nature différentielle peut disparaître et par suite sa double qualité n'est pas essentielle.

Nous n'insisterons pas sur cette équation particulière. Elle nous servira cependant pour faire une remarque intéressante au point de vue physique. Nous avons vu dans l'article précédent qu'on pouvait déterminer le coefficient d'hérédité par la résolution d'une équation intégrale qui exprime la relation statique. De même, on voit facilement qu'on peut déterminer le coefficient d'hérédité par voie dynamique en observant les oscillations du fil, et en résolvant l'équation intégrale (5) par rapport à  $\phi$ , si l'on suppose qu'elle soit une fonction de  $t - \tau$ .

## § IX

Passons maintenant au problème général de l'élasticité, en tenant compte des phénomènes d'hérédité.

La loi de Hooke établit des relations linéaires entre les six éléments qui individualisent les tensions en chaque point (le stress) et les six éléments qui individualisent la déformation (le strain) (II<sup>ème</sup> leçon, § II).

Si nous désignons par  $t_{is}$  et  $\gamma_{is}$  ( $i, s = 1, 2, 3$ ) ces éléments, nous aurons les équations,

$$(6) \quad \gamma_{is} = \sum \alpha_{is|hk} t_{hk}.$$

On néglige ainsi les phénomènes d'hérédité, car on suppose que la déformation actuelle ne dépend que des tensions actuelles, mais si nous voulons tenir compte qu'une tension quelconque s'exerçant dans une particule du milieu élastique fait ressentir son effet sur toutes les déformations futures, il faudra corriger l'équation précédente, comme nous avons fait dans le cas particulier de la torsion, en ajoutant un terme  $\phi_{is}$  qui dépend de toutes les tensions qui se sont exercées sur la particule qu'on envisage depuis le temps  $-\infty$  jusqu'à l'instant actuel. En supposant vérifiées des conditions analogues à celles que nous avons admises dans le cas de la torsion, on pourra développer  $\phi_{is}$  dans une série du type analogue à celle de Taylor et qui se rapproche de la série que nous avons déjà rencontrée dans le § IV. On aura ainsi une somme infinie de termes constitués successivement par des intégrales simples, doubles, triples, etc.

Si nous faisons l'hypothèse que, dans une première approximation, on puisse négliger tous les termes de cette série, le premier excepté, c'est-à-dire celui qui renferme les intégrales simples, l'équation qui remplacera la relation (6) sera

$$\gamma_{is}(t) = \sum \alpha_{is|hk} t_{hk}(t) + \int_{-\infty}^t \sum \phi_{is|hk}(t, \tau) t_{hk}(\tau) d\tau.$$

Cette équation se simplifie si l'on suppose que les actions antérieures à un instant  $t_0$  soient négligeables. Elle devient alors

$$(7) \quad \gamma_{is}(t) = \sum \alpha_{is|hk} t_{hk}(t) + \int_{t_0}^t \sum \gamma_{is|hk}(t, \tau) t_{hk}(\tau) d\tau.$$

La modification ainsi introduite dans la loi de Hooke change le type des relations fondamentales, car elle les transforme en relations intégrales. Toutefois les relations se conservent linéaires, et par suite nous appellerons, comme nous avons fait précédemment, *hérédité linéaire* celle que nous considérons. Au point

de vue physique cette propriété caractérise le principe de la superposition des effets des tensions qui se sont exercés dans tous les instants précédant l'instant actuel. Ces effets sont réduits proportionnellement aux coefficients  $\phi_{is|hk}(t, \tau)$  qu'on peut appeler les *coefficients d'hérédité*. Ils dépendront en général des variables  $t, \tau$  et, en outre, des coordonnées  $x, y, z$  de la particule qu'on envisage. Il est évident que ces coefficients doivent diminuer lorsque l'intervalle  $t - \tau$  croît, et devenir infiniment petits lorsque  $t - \tau$  devient infini. Nous supposons que,  $t - \tau$  étant l'infini principal,  $\phi_{is|hk}(t, \tau)$  soient infiniment petits d'ordre  $1 + \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ). Les relations fondamentales (7) constituent des systèmes d'équations intégrales, et il n'y a pas de difficultés à les résoudre par rapport à  $t_{hk}(t)$  de la même manière par laquelle nous avons résolu une seule équation intégrale, c'est-à-dire, en remplaçant d'abord les intégrales par des sommes et en suite passant à la limite. Il suffit pour cela supposer que le déterminant  $D$  des quantités  $\alpha_{is|hk}$  ne soit pas nul.

On exprime ainsi les tensions linéairement par les déformations et l'on trouve

$$(8) \quad t_{hk} = \sum A_{is|hk} \gamma_{is}(t) + \int_{t_0}^t \Phi_{is|hk}(t, \tau) \gamma_{is}(\tau) d\tau.$$

Les coefficients  $A_{is|hk}$  sont les rapports des déterminants réciproques des éléments  $\alpha_{is|hk}$  du déterminant  $D$  au même déterminant. Les fonctions  $\Phi_{is|hk}(t, \tau)$  se calculent moyennant des opérations de quadrature, appliquées aux fonctions  $\phi_{is|hk}$ , analogues à celles que nous avons indiquées dans 6, § VI.

Les considérations que nous avons exposées au § VI sont applicables dans ce cas, c'est-à-dire on peut étendre le principe du cycle fermé.

En effet on démontre que, si à toute variation périodique des quantités  $t_{is}$  doivent correspondre des variations périodiques des quantités  $\gamma_{hk}$  avec la même période, les coefficients  $\phi_{is|hk}(t, \tau)$  doivent être des fonctions de la différence  $t - \tau$ . On tire de là l'équivalence des propriétés du cycle fermé et de l'invariabilité de l'hérédité. Lorsque les coefficients  $\phi_{is|hk}$  sont des fonctions de  $t - \tau$ , on peut facilement les calculer, en connaissant les fonctions  $\gamma_{hk}$  et  $t_{is}$ , par la résolution d'un système d'équations intégrales.

Dès que nous avons exprimé les tensions  $t_{hk}$  par les déformations  $\gamma_{is}$  (formules (8)) il n'y a plus de difficulté pour écrire



les conditions d'équilibre. Il suffit d'appliquer les conditions indéfinies de l'équilibre élastique, c'est-à-dire :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} = \rho X, \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} = \rho Y, \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} = \rho Z \end{cases}$$

(où  $\rho$  est la densité et  $X, Y, Z$  sont les forces de masse), et les conditions au contour.

$$(9') \quad \begin{cases} t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz = X_\sigma, \\ t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz = Y_\sigma, \\ t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz = Z_\sigma, \end{cases}$$

où  $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$  sont les tensions au contour.

Écrivons maintenant les quantités  $\gamma_{hk}$  exprimées par les composantes des déplacements  $u, v, w$ , du corps élastique ; on aura

$$(9'') \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Si nous substituons dans les équations (9) et (9') les quantités  $t_{hk}$  par les expressions (8), et dans les formules qu'on trouve nous remplaçons les quantités  $\gamma_{hk}$  par les expressions précédentes (9''), les relations (9), (9') deviendront des équations *intégrales-différentielles*, car les quantités inconnues  $u, v, w$  paraîtront dans ces équations sous des intégrales et seront aussi dérivées par rapport aux variables  $x, y, z$ .

Nous voyons donc que, si l'on envisage la question générale de l'élasticité en tenant compte de l'hérédité, on est conduit aux équations intégrales-différentielles. Par des considérations très simples on trouve que ces équations, dans le cas où le corps élastique est homogène et isotrope, deviennent

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} K\Delta^2 u(t) + (L+K) \frac{\partial \theta(t)}{\partial x} + \int_{t_0}^t \left[ \psi(t, \tau) \Delta^2 u(\tau) \right. \\ \quad \left. + (\phi(t, \tau) + \psi(t, \tau)) \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial x} \right] d\tau = \rho X(t), \\ K\Delta^2 v(t) + (L+K) \frac{\partial \theta(t)}{\partial y} + \int_{t_0}^t \left[ \psi(t, \tau) \Delta^2 v(\tau) + (\phi(t, \tau) \right. \\ \quad \left. + \psi(t, \tau)) \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial y} \right] d\tau = \rho Y(t), \\ K\Delta^2 w(t) + (L+K) \frac{\partial \theta(t)}{\partial z} + \int_{t_0}^t \left[ \psi(t, \tau) \Delta^2 w(\tau) \right. \\ \quad \left. + (\phi(t, \tau) + \psi(t, \tau)) \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial z} \right] d\tau = \rho Z(t), \end{array} \right.$$

où  $L$  et  $K$  sont des quantités constantes et  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ .

Elles se réduisent évidemment aux équations bien connues de l'équilibre élastique ordinaire, dès que l'on élimine les termes intégrales qui paraissent à cause de l'hérédité.

Les équations que nous venons de trouver correspondent aux problèmes statiques. Elles sont de type elliptique. Il n'y a pas de difficulté à déterminer celles des vibrations, car il suffit, par le principe de d'Alembert, de remplacer les forces de masse  $\rho X$ ,  $\rho Y$ ,  $\rho Z$  par les différences

$$\rho \left( X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \quad \rho \left( Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right), \quad \rho \left( Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right).$$

On trouve dans ce cas aussi des équations intégral-différentielles, mais le type s'est ainsi transformé en hyperbolique.

## § X

Avant de procéder dans ces recherches nous voulons aborder le problème de l'électromagnétisme pour les corps en repos en ayant égard à l'hérédité. (5ème question, § V.)

Nous devons partir des équations de Hertz, dont nous avons parlé dans la première leçon,<sup>10</sup> c'est-à-dire des équations

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \end{array} \right. \quad (11') \left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u, \\ A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v, \\ A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w, \end{array} \right.$$

où  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ ;  $X, Y, Z$ ;  $u, v, w$  sont les composantes de la polarisation, de la force et du courant électrique, tandis que  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ;  $L, M, N$  sont les composantes de la polarisation et de la force magnétique.

Les conditions ordinaires qu'on ajoute aux équations précédentes sont des relations algébriques linéaires et entières entre les composantes de la force électrique et celles de la polarisation électrique, et entre les composantes de la force magnétique et celles de la polarisation magnétique. Mais, si nous tenons compte de l'hérédité, il faudra remplacer ces relations par des relations intégrales tout-à-fait analogues à celles que nous venons de considérer dans le cas de l'élasticité. Si nous admettons le principe de la superposition des effets dus à des causes qui se superposent nous trouverons des relations intégrales linéaires.

Leur type sera le suivant :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(t) = \epsilon_{11}X(t) + \epsilon_{12}Y(t) + \epsilon_{13}Z(t) + \int_{t_0}^t [X(\tau)\phi_{11}(t, \tau) \\ + Y(\tau)\phi_{12}(t, \tau) + Z(\tau)\phi_{13}(t, \tau)]d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}(t) = \epsilon_{21}X(t) + \epsilon_{22}Y(t) + \epsilon_{23}Z(t) + \int_{t_0}^t [X(\tau)\phi_{21}(t, \tau) \\ + Y(\tau)\phi_{22}(t, \tau) + Z(\tau)\phi_{23}(t, \tau)]d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(t) = \epsilon_{31}X(t) + \epsilon_{32}Y(t) + \epsilon_{33}Z(t) + \int_{t_0}^t [X(\tau)\phi_{31}(t, \tau) \\ + Y(\tau)\phi_{32}(t, \tau) + Z(\tau)\phi_{33}(t, \tau)]d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(t) = \mu_{11}L(t) + \mu_{12}M(t) + \mu_{13}N(t) + \int_{t_0}^t [L(\tau)\psi_{11}(t, \tau) \\ + M(\tau)\psi_{12}(t, \tau) + N(\tau)\psi_{13}(t, \tau)]d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(t) = \mu_{21}L(t) + \mu_{22}M(t) + \mu_{23}N(t) + \int_{t_0}^t [L(\tau)\psi_{21}(t, \tau) \\ + M(\tau)\psi_{22}(t, \tau) + N(\tau)\psi_{23}(t, \tau)]d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(t) = \mu_{31}L(t) + \mu_{32}M(t) + \mu_{33}N(t) + \int_{t_0}^t [L(\tau)\psi_{31}(t, \tau) \\ + M(\tau)\psi_{32}(t, \tau) + N(\tau)\psi_{33}(t, \tau)]d\tau. \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans les équations de Hertz (11), (11'), nous trouvons aussi dans ce cas des équations intégrales-différentielles. Par la résolution des équations intégrales précédentes nous pourrions exprimer les forces élastiques et magnétiques par les polarisations électriques et magnétiques. On pourra aussi répéter ce que nous avons dit sur le principe du cycle fermé dans les articles précédents.

Envisageons maintenant un cas particulier. C'est le cas statique qui est le plus simple qui puisse se présenter, où

$$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z},$$

changent si lentement qu'on peut négliger les quantités

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}; \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t},$$

et le milieu n'est pas conducteur. Dans ce cas les potentiels électriques et magnétiques existent.

Soit  $V$  le potentiel électrique, et supposons que les quantités  $\epsilon_{rs}$  et  $\phi_{rs}$  soient nulles si  $r \geq s$ .

On aura alors l'équation

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} \frac{\partial^2 V(t)}{\partial x^2} + \epsilon_{22} \frac{\partial^2 V(t)}{\partial y^2} + \epsilon_{33} \frac{\partial^2 V(t)}{\partial z^2} + \int_{t_0}' \left( \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} \phi_{11}(t, \tau) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2} \phi_{22}(t, \tau) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2} \phi_{33}(t, \tau) \right) d\tau = 0, \end{aligned}$$

qui peut être transformée aisément dans l'autre

$$\begin{aligned} (12) \quad \Delta^2 V(t) + \int_{t_0}' \left( \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2} \phi(t, \tau) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Cette équation, si l'on néglige l'hérédité, se réduit à l'équation de Laplace :

$$\Delta^2 V = 0.$$

Nous prendrons l'équation (12) pour type des équations intégral-différentielles elliptiques, comme l'équation de Laplace est le type des équations différentielles elliptiques. Les méthodes qu'on emploie pour l'équation (12) peuvent être aisément étendus aux cas plus compliqués. Nous aborderons les conceptions fondamentales de ces méthodes dans l'article suivant.

## § XI

Nous pouvons commencer par supposer que le second membre ne soit pas nul, mais qu'il soit une fonction donnée  $F(x, y, z, t)$ . Nous désignerons alors l'équation par (12<sup>1</sup>).

Si  $f = \phi = \psi$ , l'équation pourra s'écrire

$$\Delta^2 V(t) + \int_{t_0}^t f(t, \tau) \Delta^2 V(\tau) d\tau = F.$$

Alors, en résolvant l'équation intégrale par rapport à  $\Delta^2 V$ , nous trouverons

$$(13) \quad \Delta^2 V = \phi(x, y, z, t)$$

où  $\phi$  est une fonction connue.

C'est pourquoi le problème est décomposable en deux problèmes distincts, 1° résolution d'une équation intégrale, 2° intégration de l'équation différentielle (13), c'est-à-dire de l'équation de Poisson. L'analyse relative aux équations intégrales et celle des équations différentielles suffisent donc, pour traiter l'équation intégral-différentielle quand  $f = \phi = \psi$ . Par suite elle ne constitue pas, dans ce cas particulier, un problème nouveau. Mais, supposons que les fonctions  $f, \phi, \psi$  ne soient pas égales entre elles, alors les deux analyses des équations intégrales et des équations différentielles ne suffisent plus pour résoudre le problème et il en faut une nouvelle pour atteindre le but.

Pour approfondir ce que nous venons de remarquer, on peut transformer le problème d'une autre manière. Posons

$$V(x, y, z, t) + \int_{t_0}^t V(x, y, z, \tau) f(t, \tau) d\tau = V_1(x, y, z, t),$$

$$V(x, y, z, t) + \int_{t_0}^t V(x, y, z, \tau) \phi(t, \tau) d\tau = V_2(x, y, z, t),$$

$$V(x, y, z, t) + \int_{t_0}^t V(x, y, z, \tau) \psi(t, \tau) d\tau = V_3(x, y, z, t),$$

et résolvons ces équations intégrales par rapport à  $V$ . Nous aurons, par le procédé que nous avons exposé,

$$\begin{aligned} V(x, y, z, t) &= V_1(x, y, z, t) + \int_{t_0}^t V_1(x, y, z, \tau) f_1(t, \tau) d\tau \\ &= V_2(x, y, z, t) + \int_{t_0}^t V_2(x, y, z, \tau) \phi_1(t, \tau) d\tau \\ &= V_3(x, y, z, t) + \int_{t_0}^t V_3(x, y, z, \tau) \psi_1(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

où les fonctions  $f_1, \phi_1, \psi_1$  peuvent se calculer par des opérations de quadrature. En même temps nous aurons

$$(14) \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = F.$$

C'est pourquoi notre équation intégrro-différentielle peut se transformer dans les deux équations intégrales :

$$\begin{aligned}
 (15) \quad V_1(x, y, z, t) + \int_{t_0}^t V_1(x, y, z, \tau) f_1(t, \tau) d\tau \\
 = V_2(x, y, z, t) + \int_{t_0}^t V_2(x, y, z, \tau) \phi_1(t, \tau) d\tau \\
 = V_3 + \int_{t_0}^t V_3(x, y, z, \tau) \psi_1(t, \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

et dans l'équation (14). Ces équations sont simultanées et en général ne sont pas séparables entre elles.

Mais si  $f = \phi = \psi$ , alors  $V_1, V_2, V_3$  deviennent égales et par suite l'équation (14) se réduit à l'équation de Poisson, tandis que les équations intégrales (15) deviennent des identités.

Supposons donc que les fonctions  $f, \phi, \psi$  ne soient pas égales entre elles et supposons  $F = 0$ . Nous allons donner les résultats généraux qu'on peut trouver dans ce cas, et que l'on peut comparer avec les propriétés de l'équation de Laplace.<sup>11</sup> D'abord on peut démontrer qu'à l'intérieur d'un espace  $S$  il n'y a qu'une seule fonction  $V$  qui prend des valeurs déterminées au contour  $\sigma$  du champ  $S$  pour les valeurs de  $t$  comprises entre  $t_0$  et  $T$  ( $T > t_0$ ).

C'est pourquoi on peut se poser le problème de calculer la fonction  $V$ , ses valeurs au contour étant données pour les valeurs de  $t$  comprises entre  $t_0$  et  $T$ . Il est évident l'analogie existant entre ce problème et le problème ordinaire de l'équation de Laplace.

Il est bien connu le rôle joué par le théorème de Green. Il établit une liaison de réciprocité entre deux solutions quelconques régulières de l'équation de Laplace. On peut se demander s'il y a un théorème analogue pour l'équation intégrro-différentielle. La réponse est affirmative, mais dans ce cas il faut établir un lieu de réciprocité entre une solution de l'équation (12) et une solution de l'équation adjointe

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \Delta^2 U(t) + \int_t^{\theta} \left( \frac{\partial^2 U(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 U(\tau)}{\partial y^2} \phi(\tau, t) \right. \\
 \left. + \frac{\partial^2 U(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right) d\tau = 0.
 \end{aligned}$$

Il faut rappeler à ce propos que dans la théorie de Riemann on généralise aussi le théorème de Green par l'introduction des

équations adjointes, mais le type de l'équation adjointe est dans le cas que nous envisageons complètement différent.

Voici la relation de réciprocité, entre une solution régulière  $V$  de l'équation (12) et une solution régulière  $U$  de l'équation (16), qui correspond au théorème de Green dans notre cas,

$$(A) \quad H_\sigma([V, U], \theta) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} H_\sigma([V, U], \theta) = & \int_{\sigma}^{\theta} dt \int_{\sigma} \left( U(t) \frac{\partial V(t)}{\partial n} - V(t) \frac{\partial U(t)}{\partial n} \right) d\sigma \\ & + \int_{\sigma}^{\theta} dt \int_{\sigma} d\tau \int_{\sigma} \left\{ \left( U(\tau) \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} - V(\tau) \frac{\partial U(\tau)}{\partial x} \right) f(\tau, t) \cos nx \right. \\ & + \left( U(\tau) \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} - V(\tau) \frac{\partial U(\tau)}{\partial y} \right) \phi(\tau, t) \cos ny \\ & \left. + \left( U(\tau) \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} - V(\tau) \frac{\partial U(\tau)}{\partial z} \right) \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma, \end{aligned}$$

$n$  étant la normale au contour.

Pour appliquer cette formule il faut obtenir une solution fondamentale de l'équation adjointe, c'est-à-dire une fonction qui la satisfait et devient infinie dans un pôle interne au champ  $S$ . Je vais indiquer comment elle peut être déduite des solutions fondamentales connues. Cela nous servira pour montrer de quelle manière la solution des équations intégral-différentielles se rattache à la conception fondamentale par laquelle les différentes questions relatives aux équations intégrales ont été résolues, c'est-à-dire à l'idée de les considérer comme le cas limite des systèmes d'équations linéaires.

Posons en effet le système d'équations différentielles simultanées

$$\begin{aligned} \Delta^2 v_1 &= 0, \\ a_{21} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + b_{21} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + c_{21} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \Delta^2 v_2 &= 0, \\ (17) \quad a_{31} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + b_{31} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + c_{31} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + a_{32} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{32} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{32} \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \\ &+ \Delta^2 v_3 = 0. \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Il est évident que l'équation intégral-différentielle (12) n'est que le cas limite de ce système, en supposant que le nombre des inconnues et des équations croissent indéfiniment.

Le système adjoint au précédent système sera

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 u_1 + a_{21} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{21} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{21} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + a_{31} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + b_{31} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \\
 + c_{31} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \dots = 0, \\
 \Delta^2 u_2 + a_{32} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + b_{32} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + c_{32} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \dots = 0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Or, il n'est pas difficile de calculer la solution fondamentale de ce système ou du système (18) en partant de la solution fondamentale  $\frac{1}{r}$  de l'équation de Laplace,  $r$  étant la distance entre le point  $x, y, z$  et le pôle. C'est ainsi que pour le système (17) nous aurons la solution fondamentale

$$v_1 = \frac{1}{r}, \quad v_2 = -a_{21} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - b_{21} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - c_{21} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}, \quad \dots$$

En passant à la limite l'on trouve la solution fondamentale de l'équation (12). On peut faire un calcul analogue pour les équations adjointes (18). C'est par un passage à la limite, tout-à-fait semblable, que l'on a pu trouver l'équation réciproque (A). D'autre part on peut l'obtenir aussi directement. Pour simplifier nous n'écrirons pas explicitement la solution fondamentale de l'équation adjointe (16), mais supposons de la désigner par  $W$ . Alors, si nous remplaçons  $U$  par  $W$  dans la formule (A), et si nous retranchons le pôle moyennant une sphère, dont on fait diminuer indéfiniment le rayon, on arrive à exprimer la valeur de  $V$  dans le pôle interne au champ  $S$  par les valeurs de  $V$  et de ses dérivées au contour. Les calculs pour trouver la formule définitive sont très-complicés, mais, par des circonstances heureuses qui font évanouir certains termes, la solution se simplifie. Voici la formule définitive

$$(A') \quad V_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} H_\sigma ([V, W], \theta)$$

où  $V_0(\theta)$  représente la valeur de  $V(x, y, z, t)$  lorsque  $x, y, z$  sont les coordonnées du pôle et  $t = \theta$ . Elle est la formule fondamentale de la théorie et s'étend facilement au cas de l'équation que nous avons désignée par (12<sup>1</sup>) au commencement du § XI.



## § XII

Nous avons parlé dans la leçon précédente de la méthode de Betti pour intégrer les équations différentielles de l'équilibre élastique (§ IV) et de celle de Kirchhoff (§ V). Nous allons montrer que dans le cas de l'hérédité il est possible de donner des résolutions aussi générales. Il faut pour cela employer des méthodes qui sont une généralisation de celle que nous venons d'exposer par rapport à l'équation (12) et qui découlent, par suite, de l'union des conceptions fondamentales relatives aux équations différentielles et aux équations intégrales.

Revenons aux relations (8) (9) (9') (9'') qui expriment les équations de l'équilibre élastique dans le cas de l'hérédité. Si nous voulons établir un théorème fondamental de réciprocité il faut accoupler une solution de ces équations avec une solution d'un système adjoint.

Pour obtenir le système adjoint il suffit de remplacer l'équation (8) par

$$t_{hk}' = \Sigma A_{is|hk} \gamma_{is}'(t) + \int_0^t \Sigma \psi_{is|hk}(t, \tau) \gamma_{is}'(\tau) d\tau,$$

en conservant les autres, c'est-à-dire en écrivant

$$\begin{cases} \frac{\partial t_{11}'}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}'}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}'}{\partial z} = \rho X', \\ \frac{\partial t_{21}'}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}'}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}'}{\partial z} = \rho Y', \\ \frac{\partial t_{31}'}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}'}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}'}{\partial z} = \rho Z', \end{cases} \quad \begin{cases} t_{11}' \cos nx + t_{12}' \cos ny + t_{13}' \cos nz = \dot{X}_\sigma', \\ t_{21}' \cos nx + t_{22}' \cos ny + t_{23}' \cos nz = \dot{Y}_\sigma', \\ t_{31}' \cos nx + t_{32}' \cos ny + t_{33}' \cos nz = \dot{Z}_\sigma', \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11}' &= \frac{\partial u'}{\partial x}, & \gamma_{22}' &= \frac{\partial v'}{\partial y}, & \gamma_{33}' &= \frac{\partial w'}{\partial z}, \\ \gamma_{23}' &= \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}, & \gamma_{31}' &= \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}, & \gamma_{12}' &= \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}. \end{aligned}$$

Le théorème de réciprocité sera le suivant :

$$\begin{aligned} (B) \int_{t_0}^t dt \int_S \rho (Xu' + Yv' + Zw') dS \\ + \int_\sigma (X_\sigma u' + Y_\sigma v' + Z_\sigma w') d\sigma \\ = \int_{t_0}^t dt \int_S \rho (X'u + Y'v + Z'w) dS \\ + \int_\sigma (X_\sigma' u + Y_\sigma' v + Z_\sigma' w) d\sigma, \end{aligned}$$

où  $S$  est l'espace occupé par le corps élastique et  $\sigma$  son contour. Pour appliquer ce théorème il faut calculer des solutions fondamentales. On les obtient facilement dans le cas de l'isotropie où les équations prennent la forme (10).

En effet par des opérations de dérivation elles amènent à la relation,

$$(L + 2K)\Delta^2\theta + \int_{\sigma}^i (\phi + 2\psi)\Delta^2\theta d\tau = \frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z},$$

d'où l'on peut tirer, par la résolution d'une équation intégrale, la valeur de  $\Delta^2\theta$ . Si les forces de masse sont nulles,  $\theta$  est harmonique.

De même on peut obtenir, par la résolution d'équations intégrales, les valeurs de  $\Delta^2\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$ ,  $\Delta^2\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$ ,  $\Delta^2\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$  et l'on voit ainsi que  $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  sont harmoniques, si les forces de masses sont nulles.

C'est par-là que des solutions fondamentales des équations adjointes peuvent être obtenues. En employant la formule de réciprocité (B) on peut exprimer soit la dilatation et la rotation, soit les composantes des déplacements en fonctions des déplacements et des tensions au contour. Dans le cas de la sphère des méthodes particulières peuvent donner directement la solution.

Avant de finir nous ne dirons qu'un mot sur le cas typique des équations intégral-différentielles hyperboliques analogues à l'équation différentielle de Kirchhoff.

Envisageons l'équation

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} - \Delta^2 u(x, y, z, t) + \int_{\sigma}^i \left[ f(t, \tau) \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \phi(t, \tau) \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \psi(t, \tau) \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \right] d\tau = 0.$$

Si les fonctions  $f$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  sont égales, on peut procéder d'une manière analogue à celle que nous avons indiquée quand nous nous sommes occupés du problème dynamique de la torsion, mais lorsque  $f$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  ne sont pas égales entre elles, alors il faut commencer par obtenir directement un théorème de réciprocité. Il faut après calculer une solution fondamentale, et on y arrive

par un procédé spécial que nous ne développerons pas ici. Enfin en introduisant la fonction fondamentale dans la formule de réciprocité on peut étendre la formule ( $A'$ ) du cas elliptique à celui hyperbolique.

Voilà les principaux résultats que nous nous sommes proposés d'exposer par rapport à l'hérédité.

Ils prouvent que, par la théorie des équations intégrales et des équations différentielles, on peut développer d'une manière générale l'étude analytique des phénomènes d'hérédité sans faire aucune hypothèse particulière sur les fonctions qui la caractérisent, c'est-à-dire les coefficients d'hérédité. Il est bien connu que dans les questions de physique mathématique et de mécanique il est utile de laisser, autant qu'il est possible, indéterminées les constantes et de ne les fixer numériquement qu'au dernier moment, lorsqu'on applique les formules à des questions concrètes. C'est à cause de cela que l'importance de l'application de l'algèbre aux questions naturelles a toujours grandi. De même on voit l'utilité de laisser indéterminées les susdites fonctions en résolvant les questions d'hérédité avec la plus grande généralité possible. On pourra fixer les coefficients d'hérédité dans les cas particuliers qui se présenteront ou même les déterminer par la comparaison des formules générales avec les résultats de l'observation. C'est par-là que ressort le caractère essentiel et l'utilité des méthodes qui se rattachent à la conception des fonctions qui dépendent de toutes les valeurs d'autres fonctions, d'où découlent les méthodes employées pour les équations intégrales et intégrales-différentielles.

Faute de ces méthodes, des développements analytiques pour l'hérédité ne seraient pas possibles et il faudrait s'arrêter aux premiers pas.

L'hérédité que nous avons considérée est l'hérédité linéaire. Le trainage et les actions consécutives (*Nachwirkung*) s'approchent de cette sorte d'hérédité. Il est évident que l'hystérésis dite électrotechnique n'y rentre pas. Il suffit, par exemple, d'envisager le phénomène de la magnétisation permanente pour s'en convaincre, mais rien n'empêche d'étendre le domaine de la théorie en sortant du cas linéaire.<sup>12</sup> C'est ainsi que nous avons répondu à la sixième question posée dans le § V.

<sup>1</sup> *Rivista di Scienza*, Vol. 1. Bologna, 1907.

<sup>2</sup> *De la méthode dans les Sciences*. Paris, Alcan, 1909.

<sup>3</sup> *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung.* Wien, Ber. 70. Wiss. Abh. I. Bd.

<sup>4</sup> *Gesetze der elastische Nachwirkung.* Wied. Ann. Bd. 50.

<sup>5</sup> *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni.* Nota I. Rend. Acc. dei Lincei, Vol. III, § 3. (Voir note 7 de la première leçon.)

<sup>6</sup> *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota I, II, III, IV. Atti dell'Accademia di Torino. Vol. XXXI. 1896. — Rend. Acc. dei Lincei. 1° Sem. 1896. — Sulla inversione degli integrali multipli. *Ibid.* — Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti. Ann. di Mat. 1897.

<sup>7</sup> Voir en particulier le § 3 de la Nota I: *Sulla inversione degli integrali definiti.* Atti dell'Accademie di Torino, 1896.

<sup>8</sup> Voir la citation de la note 35 de la deuxième leçon.

<sup>9</sup> *Sulle equazioni della elettrodinamica.* Rend. Acc. dei Lincei. 1° Sem. 1909.

<sup>10</sup> Voir la citation de la note précédente.

<sup>11</sup> *Sulle equazioni integro-differenziali.* Rend. Acc. dei Lincei. 1° Sem. 1909.

<sup>12</sup> *Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions.* Comptes rendus, 1906. 1er Sem. page 691.

# HISTORY OF THE ALPHA RAYS FROM RADIO-ACTIVE SUBSTANCES.

By E. RUTHERFORD, D.Sc., LL.D., F.R.S., Langworthy Professor of Experimental Physics at the University of Manchester.

THE nature and properties of the  $\alpha$  rays from radio-active substances have presented one of the most important and interesting problems in the field of Radio-activity. A careful study of this type of radiation has been instrumental in bringing to light a number of very important facts which have added much to our knowledge not only of the radiation itself, but also of the nature of radio-active transformations.

In studying the radiation from uranium and its compounds by the electric method, I observed in 1898 that two types of radiations were present, one far more easily absorbed than the other. The less penetrating type, which was readily absorbed by a few centimetres of air or by thin metal foil, was called the  $\alpha$  rays, and the more penetrating type the  $\beta$  rays. These names have been generally adopted. When a still more penetrating type of radiation was discovered by Villard, the name  $\gamma$  rays was applied. It is now known that similar types of radiation are emitted from the radio-elements uranium, radium, thorium, and actinium.

On account of their small penetrating power, the  $\alpha$  rays were at first considered of little importance, but attention was concentrated on the more penetrating  $\beta$  rays. Giesel showed that the  $\beta$  rays from radium were easily deflected by a magnetic field, and his results were soon confirmed by a number of observers. It was soon shown that the  $\beta$  rays were identical in character with the cathode rays generated in a vacuum tube, and thus consist of negatively charged particles, of apparent mass small compared with the mass of the hydrogen atom. On an average, the majority of the  $\beta$  particles emitted from radio-active substances have velocities between 2 and  $3 \times 10^{10}$  cms. per second. The swiftest  $\beta$  particles from radium and thorium have a velocity nearly equal to that of light.

In the meantime, it was observed that the greater part of the ionisation produced by a layer of radio-active matter was due to the  $\alpha$  rays, and that consequently most of the energy emitted was in the form of these rays. The increasing recognition of the importance of the  $\alpha$  rays led to a consideration of their possible nature. Strutt in 1901 and Sir William Crookes in 1902 both suggested that they might prove to consist of positively charged particles, analogous to the canal rays observed in a vacuum tube. I had independently arrived at the same conclusion from various evidence. If the  $\alpha$  rays consisted of charged particles, they should be deflected in a magnetic and in an electric field. In the earlier experiments I found that the deflection must be very small, for a magnetic field that would bend the  $\beta$  particles into a circle of small radius had little if any effect on the  $\alpha$  rays.

Finally, when more concentrated radio-active material was available, I was able to show that the  $\alpha$  rays from radium were deflected by both a magnetic and an electric field, and must thus consist of a stream of charged particles, while the direction of the deflection in a magnetic field showed that the charge must be positive in sign. From a consideration of the amount of deflection in both an electric and a magnetic field, it was deduced that the swiftest velocity of the  $\alpha$  particles was  $2.5 \times 10^9$  cms. per second, and that the value of  $e/m$  — the ratio of the charge caused by the particle to its mass — was about 6000 electro-magnetic units. Now it has long been known that the value of  $e/m$  for the hydrogen atom released in the electrolysis of water is about 9660, while the value of  $e/m$  from the electron is about 17,000,000. It was thus clear that if the charges were equal in magnitude, the  $\alpha$  particle had a mass very much larger than the electron, and somewhat greater than the atom of hydrogen. It was concluded that the  $\alpha$  particles must consist of a flight of material particles atomic in mass projected with a high velocity. On account of the complexity of the  $\alpha$  rays used in the experiments, it was recognized that the value of  $e/m$  was not inconsistent with the view that the  $\alpha$  particle might be an atom of hydrogen or of helium or of some unknown substance of low atomic weight.

The discovery of the material nature of the  $\alpha$  rays at once threw a great deal of light on the processes occurring in radio-active matter. At the time of these experiments, the writer and

Mr. Soddy were engaged in a series of investigations which led to the development of the theory of transformation of radio-active matter. From consideration of the appearance of new types of radio-active matter, it was concluded that the atoms of radio-active matter were undergoing spontaneous disintegration. For example, thorium produced a new substance called thorium  $X$  at a constant rate. This in turn changed into a gaseous product, — the thorium emanation. The latter changed into a solid which was deposited on the surface of bodies and gave rise to the so-called “induced activity.” Each of these new products was found to be transformed according to a definite law, and at a characteristic rate <sup>was</sup> influenced by chemical or physical actions. It was thus concluded that the transformation took place in the atom itself, and not in the molecule. Since the great majority of these new products emitted  $\alpha$  rays, the material nature of the  $\alpha$  particle at once gave a reasonable explanation of the appearance of a new type of matter. The atom of radio-active matter in some way became unstable, and an atomic explosion resulted. A fragment of the atom — an  $\alpha$  particle — was ejected at great speed. On this view the expulsion of  $\alpha$  particles accompanied the transformation of the atoms, and served as a measure of the rate of transformation. In other words, the radiation accompanied the change. This connection had been suspected before the material nature of the  $\alpha$  particle was known. In a few cases, an atom breaks up with the expulsion of a  $\beta$  particle alone, and there are also a few products which are transformed apparently without a detectable radiation. The ejection of an  $\alpha$  particle from an atom decreases its mass, and gives an obvious reason for the appearance of a new type of matter with chemical and physical properties, quite distinct from the parent matter.

On the views here put forward, the continuous emission of energy in the form of radiations from active matter was not in contradiction to the conservation of energy. The high velocity of ejection of the  $\alpha$  particle and its consequent great energy of motion indicated that the atom of radio-active matter must be complex and consist of a number of positively and negatively charged particles in rapid orbital motion within the atom. In some way, the atom becomes unstable and breaks up, accompanied by the emission of an  $\alpha$  or  $\beta$  particle with the high velocity which it had within the atom. From this point of view, the energy of

the radiation is derived at the expense of the internal energy of the atoms, and each successive atom produced in the transformations must decrease in atomic energy.

The importance of this point of view was soon exemplified by another discovery of great interest. P. Curie and Laborde found that radium continually emitted heat at a rapid rate and was always at a higher temperature than the surrounding air. This continuous emission of heat energy seemed at first sight in contradiction with the law of conservation of energy, and various hypotheses were put forward to explain it. Some supposed that radium possessed the peculiar property of abstracting energy from the ether and then giving it out again in another form. The explanation of the heating effect is, however, much simpler and more obvious. Consider for a moment a fragment of radium enclosed in a tube which absorbs the  $\alpha$  rays. The  $\alpha$  particles ejected at a rapid rate from all parts of the radium are stopped either in the radium itself or in the walls of the glass tube. Their great energy of motion is transformed into heat *in situ*. On this view, the heating effect of radium is a secondary phenomenon, and is a direct consequence of the emission of the  $\alpha$  rays. The correctness of this point of view was soon confirmed by the experiments of Rutherford and Barnes, who showed that three-quarters of the heating effect of radium as ordinarily measured is due to the emanation and its products. The heating effect of the emanation and of each of its products decays at the same rate as it loses its  $\alpha$  ray activity. The experiments clearly showed that the emission of heat was to a large extent the measure of the kinetic energy of the expelled  $\alpha$  particles. At the same time it must not be forgotten that the observed heating effect of radium is made up of several factors. A few per cent is probably due to the  $\beta$  and  $\gamma$  rays. In addition, the expulsion of the  $\alpha$  particle leads to a recoil of the residual atom at considerable speed, and its energy of motion ultimately appears as heat. Moreover, it still remains for experiment to show whether energy is liberated or absorbed during the explosion of the atom quite independently of the kinetic energy of the expelled parts. In such an intense electro-magnetic disturbance as must result from the explosion of an atom, it is by no means impossible that some energy is released or absorbed by the components of the atom itself in taking up a new configuration of equilibrium. The enormous emission of energy in radio-



active changes is well exemplified by the heating effect of an exceedingly minute volume of radium emanation. There is no doubt that the greater part of this energy results from the expulsion of  $\alpha$  particles, and that, in the case of all  $\alpha$  ray products, the emission of energy is closely connected with the energy of the emitted  $\alpha$  particles.

We will now turn our attention to a consideration of experiments on the nature of absorption of  $\alpha$  rays by gases and solids. In the initial experiments with weak radio-active material, it was observed that the ionisation due to a thick layer of material fell off approximately according to an exponential law with the thickness of the screen placed over it. In this respect, the absorption of  $\alpha$  rays seemed at first sight similar to that observed for  $\beta$  rays. At the same time, Mme. Curie noted that the ionisation due to the  $\alpha$  rays from a thin layer of polonium fell off very rapidly when absorption was nearly complete. The elucidation of the true character of absorption of the  $\alpha$  rays has been mainly due to the admirable researches of Bragg and Bragg and Kleeman. Bragg from theoretical considerations concluded that there must be a fundamental difference in the passage of an  $\alpha$  and  $\beta$  particle through matter. On account of its small energy, the  $\beta$  particle must suffer constant and large deflections from its rectilinear path by collisions with the molecules. The  $\alpha$  particle, on the other hand, on account of its great energy of motion, should plunge through the molecules of matter in its path and pursue nearly a rectilinear course before its energy is expended. The general correctness of this point of view was soon confirmed by experiment. Bragg found that the ionisation per centimetre path due to a narrow pencil of  $\alpha$  rays, emitted from a thin layer of radio-active matter of one kind, increased at first slowly with the distance traversed, passed through a maximum, and fell off rapidly to zero. He deduced from his experiment that a thin layer of one kind of radio-active matter must expel  $\alpha$  particles at an identical speed, and that these particles have a definite and well-marked range in air. Each kind of active matter emits  $\alpha$  particles which have a range in air characteristic of the substance. The passage of an  $\alpha$  particle through a thin metal screen reduces its velocity and thus lowers the range of the  $\alpha$  particle beyond. It follows from this that a thick layer of radio-active matter of one kind must give out  $\alpha$  rays covering a wide range of velocity; for the  $\alpha$  par-

ticles emitted within the material are either stopped in it or emerge with a diminished velocity, depending upon the thickness of matter traversed. By examination of a thin film of radium in equilibrium, he was able to show the presence of four distinct sets of  $\alpha$  particles of different ranges, and thus confirmed in a striking way the results of the detailed radioactive analysis. By examination of the reduction of range of the  $\alpha$  particles in passing through gases and metals, it was deduced that the stopping power of an atom of matter is approximately proportional to the square root of its atomic weight. The main conclusions of Bragg were confirmed and extended by the writer, using the photographic method. The homogeneity and velocity of the  $\alpha$  particles were examined by deflecting a pencil of rays in a magnetic field. It was shown that a thin film of active matter gave out homogeneous rays, *i.e.* rays of identical velocity, and that the velocity of each of the  $\alpha$  particles decreased by the same amount in passing through a given thickness of matter. By the photographic method it was not possible to detect the presence of the  $\alpha$  rays after their velocity was reduced to about  $10^9$  cms. per second. It thus appeared at first as if the characteristic properties of the  $\alpha$  rays ceased when they were still travelling at a high speed. This point has been examined recently by Geiger, using the scintillation method for the detection of  $\alpha$  particles. He has been able by this method to examine  $\alpha$  particles moving at still lower speeds, and there seems to be no doubt that the velocity of the  $\alpha$  particle falls off rapidly at nearly the end of its range. It must not be forgotten that the photographic and scintillation effect is exceedingly feeble for  $\alpha$  particles near the end of their path. The experiments are complicated also by a scattering of the  $\alpha$  particles, which increases rapidly as the  $\alpha$  particle is reduced in velocity. Bragg at first concluded that the scattering must be small; but there is no doubt that it became of great importance near the end of the range of the  $\alpha$  particle, and is largely responsible for the peculiar variation of the ionisation of a pencil of  $\alpha$  rays near the end of their path. The scattering of the  $\alpha$  particles by matter has been closely examined by Geiger, using the scintillation method. Geiger and Marsden observed the surprising fact that about 1 in 8000  $\alpha$  particles incident on a heavy metal like gold is so deflected by its encounters with the molecules that it emerges again on the side of incidence. Such a result brings to light

the enormous intensity of the electric field surrounding or within the atom, for otherwise it would not be possible for such a massive particle moving with such great velocity to be turned through such a large angle.

Although the  $\alpha$  particle is deflected to some extent by its encounters with the molecules, yet on the whole it travels in nearly a rectilinear path, leaving a very large number of ions in its train. The ionisation of a volume of gas exposed to  $\alpha$  rays is thus not uniform, but consists of regions of intense ionisation. This has been shown by Moulin to account for the great difficulty in obtaining a saturation current in a gas ionised by  $\alpha$  rays, even though for the same average ionisation by the  $\beta$  or  $\gamma$  rays, saturation under the same conditions is easily obtained. It seems probable that the  $\alpha$  particle, as Bragg suggested, actually passes through the atoms in its path. The speed and energy of the  $\alpha$  particle are too great for it to be seriously deflected itself or to deflect aside the molecule which it meets.

It is now necessary to consider another important line of advance in Radio-activity which is intimately connected with the history of the  $\alpha$  particle. In putting forward the disintegration theory, Rutherford and Soddy suggested that if any stable elements are produced in the transformation of the radio-elements, these must be found collected in considerable quantity in old radio-active minerals where the process of transformation has been in progress for geological ages. In searching for such possible elements, it was noted that the rare gas helium is an invariable companion of radio-active minerals, where it is often found in considerable quantity. It was suggested that helium might prove to be a transformation product of the radio-elements, and additional weight was lent to this hypothesis by the fact that the  $\alpha$  particle appeared to be about the mass of the atom of helium. This conclusion was experimentally verified a year or so later by Ramsay and Soddy, who showed that helium was produced not only by radium, but by the emanation released from it. The helium in these experiments was in minute quantity and detected spectroscopically. The results of Ramsay and Soddy were soon confirmed by a number of observers. It was at first concluded by many that helium was the end product of the transformation of radium. In a letter to *Nature* I pointed out that this could not be the case, for many of the products of the transformation of radium which intervene, for example

radium D, have a long period of transformation. It was suggested that the helium observed was in reality due to the accumulated  $\alpha$  particles whose charge had been neutralized. At the same time an approximate estimate was made on data then available of the rate of production of helium by radium. The probable connection of the  $\alpha$  particle with the helium atom led the writer to make new and more accurate determinations of the value of  $e/m$  for the  $\alpha$  particle. In these latter experiments, homogeneous rays were used, and the amount of deflection of a pencil of rays in a magnetic and electric field was determined by the photographic method. By examining various products of radium, thorium, and actinium, it was shown that the  $\alpha$  particles from all had the same apparent mass; but that the velocity was different in each case, depending on the range of the  $\alpha$  particle. The value of  $e/m$  was found to be 5070. Assuming that the  $\alpha$  particle carried the same charge as the atom of hydrogen, this indicated that the  $\alpha$  particle had about twice the mass of the atom of hydrogen, *i.e.* had a mass equal to the hydrogen molecule. For various reasons, this deduction seemed improbable, and it was suggested that the  $\alpha$  particle was an atom of helium carrying two positive charges instead of one. This point of view reconciled the value of  $e/m$  with that to be expected for the atom of helium, which has a mass about 3.96 times that of hydrogen. At the same time the necessity of giving a double charge to an atom of a monatomic gas like helium raised a difficulty. It was pointed out that if the helium atom had two loosely attached electrons, these would certainly be released by the violent collision of the  $\alpha$  particle with the molecules of matter in its path. The  $\alpha$  particle would then retain a double positive charge.

It now became of great importance to settle definitely whether the  $\alpha$  particle carried two charges. In order to do this it was necessary to devise a method for counting the  $\alpha$  particles and measuring the total charge carried by them. In this way, the charge carried by each  $\alpha$  particle could at once be compared with the value already determined for the positive or negative ions in gases. This was accomplished by Rutherford and Geiger in the following way. The ionisation produced by an  $\alpha$  particle is too small to measure directly by ordinary methods. Recourse was had to an automatic method of magnification of the ionization until the effect could be readily detected by an electrometer. For this purpose, the  $\alpha$  particle was fired through a small opening

into a cylindrical vessel containing a gas at low pressure, exposed to an electric field nearly sufficient to precipitate a spark. Under these conditions, Townsend had shown that the positive and negative ions produced in the gas acquire such energy in moving in the electric field that they generate fresh ions by collision. In this way it is possible to magnify the initial ionisation produced by the  $\alpha$  particle several thousand times. The entrance of an  $\alpha$  particle into the detecting vessel is then marked by a sudden ballistic throw of the electrometer needle. By counting these throws, it was possible to deduce not only the fraction of the  $\alpha$  particles which entered the detecting vessel, but the total number emitted by the radio-active matter itself. It was shown that a gram of radium itself emitted  $3.4 \times 10^{10}$   $\alpha$  particles, while radium, in equilibrium with its three  $\alpha$  ray products, emitted four times this number.

It was possible to verify this conclusion by another distinct method. Crookes and Elster and Geitel had observed some years before the remarkable property of the  $\alpha$  rays in producing brilliant scintillations in phosphorescent zinc sulphide. Regener had shown that the number of these scintillations could be counted with the aid of a microscope. By comparing the number of scintillations on the screen with the number of  $\alpha$  particles counted by the electric method, it was found that there were nearly the same number of scintillations as there were incident particles. This clearly indicated that each  $\alpha$  particle striking the phosphorescent screen produces a visible flash of light. It is thus clear that there are two distinct methods, one electrical and the other optical, for detecting a single  $\alpha$  particle. This is the first time that a single atom of matter has been detected experimentally. It is only possible in this case on account of the great energy of motion of the  $\alpha$  particle. This energy is expended in one case in producing a large number of ions in the gas and in the other in producing a visible flash of light. Recently, Kinoshita has added a third method of detection of a single  $\alpha$  particle. He has found that each  $\alpha$  particle incident on a photographic plate produces an effect on development detectable under the microscope. Rutherford and Geiger, after counting the number of  $\alpha$  particles, determined the total positive charge carried by a known number, and were thus able to determine the charge on each particle. The value found was  $9.3 \times 10^{-10}$  electrostatic units. From comparison with the value of the ionic charge

previously measured by J. J. Thomson and Wilson, it was concluded that each  $\alpha$  particle carried a double charge and that the value of the unit charge was  $4.65 \times 10^{-10}$  units, — a somewhat greater value than that determined by the experimenters mentioned. The correctness of the number has recently been confirmed by Regener by counting the  $\alpha$  particles from a film of polonium by the scintillations produced in a diamond and determining the total charge carried by the rays. He found a value  $4.69 \times 10^{-10}$ . The charge carried by a gaseous ion has been accurately measured by Millikan and found to be  $4.65 \times 10^{-10}$ , while a number of observers by various methods have obtained concordant numbers for this fundamental constant.

The experimental evidence that the  $\alpha$  particle did carry two unit charges greatly strengthened the conclusion that the  $\alpha$  particle was a charged atom of helium. But the deduction depended on refined measurements and was somewhat indirect. In order to settle the question conclusively, it was necessary to show that the accumulated  $\alpha$  particles, quite apart from the matter from which they were emitted, give rise to a detectable amount of helium. This was done by Rutherford and Royds. The purified emanation of radium was compressed into a glass tube so thin that the great majority of the  $\alpha$  particles from the active matter were fired through the glass into a surrounding vessel. After some days the gas in this outer vessel was compressed into a small vacuum tube and found to give the spectrum of helium. Other experiments conclusively showed that the presence of helium could not be ascribed to the passage of the helium by diffusion through the thin glass tube. In fact, helium was always found in metals which had been placed for some hours round the tube containing emanation. In this case, the  $\alpha$  particles were embedded in the metal and were then released by heat.

These experiments gave the final proof of the identity of the  $\alpha$  particle and a charged helium atom, while the values found for  $e/m$  and for the charge of the  $\alpha$  particle showed that the expelled helium atom carried two positive charges. The evidence was thus complete that the helium produced in radio-active transformations was due to the expelled  $\alpha$  particles, the charges in which had been neutralised. The determination of  $e/m$  for  $\alpha$  particles from different radio-active materials had shown that all  $\alpha$  particles were identical in mass. It follows that any sub-

stance that emits  $\alpha$  particles produces helium, and in amount proportional to the number of  $\alpha$  particles emitted.

The determination of the number of  $\alpha$  particles and their charge at once provided the data for calculating a number of radio-active and atomic magnitudes with considerable certainty. From the determination of the unit charge, it is a simple matter to deduce the number of molecules in any unit volume of any gas at standard pressure and temperature. From this the equilibrium volume of the emanation from one gram of emanation was calculated to be .585 cubic mm. — a number in close agreement with the experimental values. Still more important, it was possible to deduce *a priori* the rate of production of helium from radium. This was calculated to be 158 cubic mms. per gram per year. The correctness of this deduction is evidenced by the latest values obtained experimentally by Dewar and by Rutherford and Boltwood. The former found a value 169 cubic mms. and the latter 163 cubic mms. Considering the difficulties of the measurements, the agreement between theory and experiment is as close as could be expected.

By counting the number of scintillations from radio-active matter, it is now possible to deduce with confidence the rate of helium production in a radio-active substance. It is known that actinium, ionium, and polonium all produce helium at about the theoretical rate. By counting the number of  $\alpha$  particles emitted by radio-active matter and by determining the volume of helium produced in a known time, it is clear that we can at once deduce with a minimum amount of assumption the number of atoms of helium in unit volume. At the same time, such an experiment brings out in a striking way the correctness of the fundamental ideas of the atomic theory of matter.

The certainty of the scintillation method of detecting and counting single  $\alpha$  particles has made it possible to push still further the already refined methods of radio-active analysis. It is possible to settle directly whether an atom of matter in its transformation emits more than one  $\alpha$  particle. In fact, Geiger and Marsden have already utilized this method for determining the number of  $\alpha$  particles emitted in each of a number of successive radio-active transformations. It is instructive to consider that we can follow, for example, the deflection of each individual  $\alpha$  particle due to scattering or due to the action of a magnetic or electric field. It has opened up a new field of

measurement, where account has to be taken of probability variations in distribution and where the laws of probability can be experimentally tested by observing a spontaneous process of nature.

We must refer, in conclusion, to the deduction of the atomic weights of the various products of the uranium-radium series. All of the radium products and ionium emit one  $\alpha$  particle in the transformation of the atom, but uranium emits two. It is not yet settled whether this is due to a simultaneous emission of two  $\alpha$  particles from the uranium atom, or to the existence of an undetected  $\alpha$  ray product always present with uranium. Remembering that the atomic weight of helium is nearly 4, the expulsion of one  $\alpha$  particle lowers the atomic weight of the parent atom by 4 units. Ionium, the first  $\alpha$  ray product after uranium, has an atomic weight 8 units less than uranium, or 230.5. Ionium changes directly into radium with the emission of an  $\alpha$  particle, and consequently radium should have an atomic weight 226.5—a number in good agreement with the experimental value. It follows that the atomic weight of the emanation, radium A, radium C, and radium F (polonium), should be 222.5, 218.5, 214.5, 210.5, respectively, while the end product of the transformation of polonium should be 206.5. The latter number is close to the atomic weight of lead. It is of interest to note that Boltwood, who first suggested that lead was the end product, has collected strong evidence that this is the case from the examination of the lead and helium content of radio-active minerals. We have left out in this calculation the products which emit either slow or swift  $\beta$  particles. It must be supposed in these cases that the atomic weight is not necessarily altered appreciably by the expulsion of a  $\beta$  particle, so that the transformation results in the production of another element of nearly identical mass but with distinct physical and chemical properties. In such a transformation there is probably a complete rearrangement of the constituents composing the atom.

It is certainly a very surprising and noteworthy fact that helium is expelled in such a large number of the successive transformations of uranium, radium, thorium, and actinium. We can only conclude that helium is one of the secondary units of which the atom of uranium is built up from lead, although, of course, it does not follow that uranium was derived



in nature by combination of lead with eight atoms of helium. The rôle played by helium in the constitution of the radio-elements is certainly very remarkable and gains a wider significance when it is considered that from a chemical standpoint the radio-active elements show no special characteristics that would differentiate them from all other elements. It seems not unreasonable to conclude that helium may prove to be a constituent of other non-radio-active elements and that helium may be one of the secondary units in building up one element from another.

## THE OPTICAL PROPERTIES OF METALLIC VAPORS

By R. W. WOOD, LL.D., Professor of Experimental Physics at the Johns  
Hopkins University

THE study of the optical properties of metallic vapors, which has occupied much of my time for the past ten years, has been carried on in the hope of furnishing data which may eventually be of use in the solution of that most interesting but difficult problem, the nature of the very complicated electro-magnetic mechanism which we call the molecule.

Twenty-five years ago the question "What is a molecule?" was asked on almost every examination paper in Physics and Chemistry, and it still remains unanswered, though most examiners have been quite satisfied with the not very comprehensive answer, "A molecule is the smallest particle of matter capable of existing by itself." The invention of the spectroscope and the study of the light emitted by molecules showed that they could not be regarded as structureless small bodies like bird-shot, but must be considered as very intricate pieces of machinery. The years of patient work with this instrument, spent in measuring and mapping tens of thousands of spectrum lines, taught us very little about the nature of the molecular mechanism, and the spectroscopist found himself much in the position of an observer who had never seen a musical instrument of any sort, and was engaged upon the problem of constructing a visual image of a piano by listening to the sounds which it emitted when falling downstairs.

The work of Thomson, Lorentz, Zeeman, and others has resulted in our conception of electrons or entities, very much smaller than molecules or atoms, carrying electric charges and subject to the forces of magnetic and electric fields. If we picture the molecule as built up of a large number of electrons revolving in closed orbits, a miniature solar system, we have at least a working hypothesis, which must stand or fall as the accumulated experimental data are in agreement or disagreement with it.

In my own work I have studied the molecular mechanism in relation to its ability to absorb light or to reëmit light as a result of this absorption. The work was begun in a very small way, with a less ambitious aim in view. In the year 1899 Professor W. H. Julius published a new theory of the "flash-spectrum" and the solar prominences, or tornadoes of luminous hydrogen rising from the sun's surface, and seen during the total phase of a solar eclipse, or by the aid of the spectroscope. Julius advanced the theory that the chromosphere and solar eruptions did not shine by their own light, but by anomalously refracted light from the glowing photosphere. An attempt to reproduce this phenomenon in the laboratory was the beginning of a study of the optical properties of metallic vapors which is still occupying my attention. A brief description of this, my first experiment with sodium vapor, may perhaps be of interest. The phenomenon of the "flash-spectrum" of the chromosphere, seen during the few seconds preceding "totality" of a solar eclipse, was reproduced without much difficulty by allowing the flame of a Bunsen burner fed with metallic sodium to play against the under side of a white plaster plate. On looking along the surface of the plate it was seen that a dark space existed between the flame and the cold surface, resembling somewhat the dark space surrounding the cathode of a Crookes's tube. It seemed highly probable that, inasmuch as the temperature of the flame was lowered by contact with the plate, the density of the sodium vapor would increase very rapidly from the surface of the plate downward. The under surface of the plaster plate having been thus covered with a non-homogeneous layer of sodium vapor, a spot at the edge of the flame was illuminated with sunlight concentrated by a large mirror. This spot radiated white light in every direction and corresponded to the incandescent photosphere of the sun. A telescope provided with an objective direct vision prism was directed toward the white spot and moved into such a position that, owing to the reduction in the width of the source of light by foreshortening, the Fraunhofer lines appeared in the spectrum. This represented the stage of an eclipse when only the thin crescent of the sun is visible. The sodium flame appeared superposed on the spectrum, of course. On moving the spectroscope until it was well inside of the plane of the illuminated surface and feeding the flame with fresh sodium, the solar spectrum vanished, and there suddenly

blazed out two narrow bright yellow lines, almost exactly in the place of the sodium lines. Cutting off the sunlight with a screen caused the instant disappearance of the bright lines, proving that the light came from the spot of white sunlight on the plaster plate, and not from the yellow flame of sodium vapor. The solar prominences were also reproduced, by heating a small fragment of sodium in an iron capsule, and allowing the vapor to refract the light from an arc-lamp.

This work, in connection with the theory of Julius, showed the importance of making a quantitative investigation of the refraction and dispersion of an absorbing vapor in the vicinity of an absorption band, and an investigation of this subject was next undertaken. Much time was lost at first, as a result of the chemical ferocity of sodium vapor at high temperatures. Hollow metal prisms were used, with faces of glass, mica, quartz, and other transparent substances, but the vapor attacked them all, rendering them opaque. Still I frequently obtained the desired prismatic refraction and eventually found that the inclination of the transparent faces of the prism had nothing to do with the phenomenon, and that the vapor formed the equivalent of a prism of its own accord. This led to the invention of the sodium dispersion tube, which exhibited the phenomenon of anomalous dispersion on a far larger scale than any method previously used, and furnished a means of starting a quantitative investigation. The apparatus was constructed in the following way: A steel tube 40 or 50 cms. long and 2 cms. in diameter is charged with a number of small lumps of metallic sodium, distributed at regular intervals along its floor. The ends are closed with glass plates, the tube exhausted to a pressure of 1 cm., and the under side heated by a row of small gas flames. The vapor is given off along the heated floor of the tube, but its diffusion towards the cooler top is interfered with by the residual gas in the tube. The vapor will be found to be very dense along the floor and highly attenuated along the top. This condition can only obtain when some other gas is present to keep the pressure balanced. It is easy to see how this condition comes about. Suppose our residual gas is at a pressure of 1 cm. and we heat the floor of the tube to a temperature such that the vapor pressure of sodium is also 1 cm. If the vapor is given off from the molten metal more rapidly than it can diffuse to the cooler parts of the tube, it will accumulate over the sur-

face of the metal, and may even be thought of as displacing the residual gas entirely in this region. Along the cooler top, where condensation is taking place, the density of the vapor can only be as great as that determined by the temperature here. Here we may have a pressure of 9 mms. of residual gas and 1 mm. of sodium vapor. Halfway between the floor and the top we may have residual gas at 5 mms. and sodium vapor also at 5 mms., while along the floor we have sodium vapor at 10 mms. and no residual gas.

It will be found that the performance of the tube is improved by laying a long pad of wet cotton along the top. This makes the temperature gradient steeper and facilitates the formation of the non-homogeneous vapor cylinder.

The best arrangement of the apparatus for showing the anomalous dispersion of the vapor is the following: A horizontal slit is illuminated by focussing the sun or arc upon it, and the emergent rays, rendered parallel by a lens, pass down the sodium tube. A second lens forms an image of the horizontal slit across the vertical slit of the spectroscope. This image should be carefully focussed, so that the spectrum appears as a brilliant narrow band with sharp edges.

On heating the tube, the sodium prism deviates the rays of different wave-length up or down by different amounts, curving the spectrum into two oppositely directed branches. The spectrum on the green side of the *D* lines will be found to bend down in the spectroscope, which means that the rays are deviated upwards in passing through the sodium tube, since the spectroscope inverts the image of its slit. This means that these rays travel faster in the sodium vapor than *in vacuo*, or the prism acts for these rays like an air prism immersed in water. The red and orange region is deviated in the opposite direction; these rays are therefore retarded by the vapor.

If we remove the spectroscope and place an eyepiece in the position previously occupied by the slit, we shall see the anomalous spectrum produced by the sodium prism, with its remarkable arrangement of colors, blue in the centre, with a flare of green and yellow light on one side, and red, orange, and yellow on the other, altogether the most remarkable and best developed anomalous spectrum yielded by any substance. To obtain this spectrum in its greatest splendor, it is best to use a tube of hard glass about 50 cms. long, heated in the same way, con-

taining fifteen or twenty small pieces of sodium. The temperature gradient is much steeper in a glass tube and the dispersion much more powerful. The flames may be turned up and down during the experiment, but they should never be turned quite out, for the tube will almost invariably crack on reheating after it has once cooled down.

Determinations of the relative values of the refractive index of the vapor for the different regions of the spectrum were made by this method, while absolute determinations were made by means of the interferometer. A sodium tube, *uniformly* heated by an electric current (since no prismatic dispersion was desired) was placed between two of the mirrors of a Michelson interferometer. The instrument was illuminated with two sources of light, one a helium spectrum tube, which gives us a bright yellow light,  $D_3$ , very near the sodium absorption band, the other a spectroscope arranged to furnish a beam of approximately monochromatic light in any desired part of the spectrum. Two sets of fringes were thus formed, and the drifts of the systems were recorded by two observers as sodium vapor was formed in the tube. To obtain the dispersion very near the absorption band, the helium tube was placed in a powerful magnetic field, which causes the line to become double (with suitable arrangement of the apparatus). The two components were of very nearly the same wave-length, the distance between them being about  $\frac{1}{20}$  of the distance between the  $D$  lines, yet the dispersion of the vapor was so powerful that the two sets of fringes were displaced at rates so different that the fringes disappeared entirely at regular intervals, owing to their "out-of-step" superposition.

Absolute values of the refractive index were obtained by heating the tube to a known temperature, measuring the length of the vapor column, and counting the fringe shift produced when monochromatic light of known wave-length was used to illuminate the instrument.

Intimately connected with the problem of the absorption and dispersion of an absorbing gas, such as sodium vapor, is the question of possible selective reflection. In the case of solid substances having strong bands of absorption (so called), we often find that the energy is not really absorbed, but wholly or in part selectively reflected. The phenomenon only manifests itself when the medium is practically opaque to the light in

question in thicknesses of the order of magnitude of the light-wave. A familiar example is the green color exhibited by reflection from purple aniline dyes.

Planck's theory of absorption is based upon the supposition that the energy, taken from the oncoming waves, is reëmitted laterally by the resonators. Though this reëmission only occurs in exceptional cases, we do find it in some instances. As I have shown, sodium vapor, when illuminated with sodium light, emits the absorbed wave-lengths without change. The emission is diffuse, however, that is, it is scattered in all directions. Radiation of this nature I have called resonance radiation, to distinguish it from fluorescence, in which case there is a change of wave-length.

It appeared highly probable that if the molecular resonators were packed closely enough together, the secondary wavelets which they emit, having a definite phase relation, would unite into a single wave, and the scattered light would disappear, regular reflection of the light taking its place. Repeated efforts to discover the phenomenon with sodium vapor yielded negative results, since it was impossible to obtain the vapor at great density with a sharply defined surface, on account of its corrosive action upon the transparent walls of the containing vessel.

The phenomenon was finally discovered by heating mercury to a high temperature in a bulb of fused quartz. The vapor has a very strong absorption line at  $\lambda = 2536$  in the ultra-violet. To separate the images formed by reflection from the inner and outer surfaces of the bulb, the necks were made of very thick-walled tubing, so that the walls of the bulb were prismatic. By properly choosing the direction in which the bulb was viewed, the reflection from the outer surface disappeared, and the slit of a small quartz spectrograph was directed towards the bright image of a mercury arc reflected from the inner surface of the wall.

It seemed best to begin by using light of exactly the right frequency, that is, of a wave-length identical with that of the absorption line. The light from the mercury arc in a quartz tube shows a strong line of exactly the right frequency. A number of photographs of the spectrum of the reflected light were taken, the first with the bulb cold, the succeeding ones at gradually increasing temperatures. It was found that the

relative intensity of the 2536.7 line in the spectrum of the reflected light increased rapidly as the temperature of the bulb increased.

Previous work having shown, however, that mercury vapor emits scattered resonance radiation, when stimulated by the light of the 2536 line, it was next necessary to prove that it was not a diffuse radiation which had caused the increased intensity of the line. A very nice method was found of proving this. If our eyes were sensitive to the ultra-violet light, we should see, in the case of the diffuse emission, the entire surface of the bulb glowing with light, while if the radiation was regularly (*i.e.* specularly) reflected by the vapor, we should see merely the small image of the arc increase in brilliancy.

The bulb was mounted vertically in such a position that the two images due to reflection from the inner and outer surfaces of the front wall appeared one above the other. Inasmuch as the mercury arc consisted of a narrow vertical column of light, these images appeared as narrow vertical lines of light, and could be used in place of the slit of the spectrograph. The arc in this case was placed at a distance of about a metre from the bulb.

The slit tube of the spectrograph was removed, and the instrument placed in such a position that the two reflected images occupied the position previously occupied by the slit. On exposing a plate we obtain two spectra one above the other, the one that of the light reflected from the outer surface, the other that of the light reflected from the inner surface.

Two photographs were taken, one with the bulb cold, the other with the bulb red-hot. The latter showed that the image of the arc as seen in the 2536 light had been increased tremendously in brilliancy by the presence of the mercury vapor.

This experiment shows that the mercury vapor reflects light of this particular wave-length in much the same way as would a coating of silver on the inside of the bulb.

Experiments were next undertaken to ascertain how nearly the frequency of the light must agree with that of the absorption band in order that metallic reflection should take place.

It was found that the spectrum of the iron arc showed a group of closely packed lines exactly in the region required,



and it was accordingly put in place of the mercury arc. The slit was replaced on the quartz spectrograph, and photographs of the reflected image of the arc were taken with the bulb cold and heated to different temperatures. A very remarkable discovery was at once made, for it turned out that the iron line which was metallically reflected (2535.67) was about one Ångström unit on the short-wave-length side of the absorption line. As the temperature and vapor density increased, a second iron line was strongly reflected, this one coinciding almost exactly with the absorption line. It is in reality a double line, with wave-lengths 2536.90 and 2537.21.

To make absolutely sure that no error had occurred, I photographed the spectrum of the iron arc, passing the light through mercury vapor at different densities.

The iron line which first disappeared was the double one, which was not reflected until the mercury vapor was at its greatest density. The line which was metallically reflected by the vapor at a lesser density was not absorbed by the vapor, even when its density was so great that four or five lines on the long-wave-length side of the line first absorbed were completely blotted out.

The explanation of the more powerful reflection of the shorter iron line is probably as follows: —

The 2536.7 line of mercury shows powerful anomalous dispersion. The refractive index, in its immediate vicinity, on the short-wave-length side is much below unity, probably as low as .5 or even less close to the line. In the case of light going from a rare to a dense medium, a high value of the index for the latter is accompanied by strong reflection. When, however, the ray goes from dense to rare (quartz to mercury vapor), as in the present case, it is a low value of the index for the latter which is accompanied by strong reflection. Now the index for mercury vapor is not far from unity for the entire spectrum, with the exception of very narrow regions bordering the 2536 line. On the long-wave-length side the index may be about that of quartz, consequently there is no reflection at all here, at least none depending upon the relative values of  $n$ . On the other side, where the index is considerably below unity, the reflection will be much more powerful than when the bulb is filled with air. This means that the band of metallic reflection will be shifted slightly towards the region of *shorter* wave-length

with respect to the true position of the absorption line, as was found to be the case.

An attempt will be made to get rid of this effect by using polarized light, reflected from the quartz-mercury vapor surface at the proper angle. This should give us "Rest-Strahlen" of the same wave-length as that of the absorption line.

One very important point in connection with the specular reflection from an absorbing vapor is the very great density necessary before the phenomenon is exhibited. In a gas at atmospheric pressure the molecules are in such close proximity that there are about 80 to the wave-length, *i.e.* 6400 in a square the sides of which are equal to a light-wave in length. This would appear to be more than sufficient for the application of Huygens's principle: experiment shows, however, that the reflection does not occur until we increase this density tenfold. It is probably a question of the suddenness with which the wave is stopped, rather than of packing the resonators close enough together to make the application of Huygens's principle possible. It appears probable that if the wave-train can penetrate to a depth of several wave-lengths into the medium, there will be no regular reflection, regardless of the proximity of the resonators. An analogous case is that of two media of very different refractive indices, between which the transition is gradual instead of abrupt. It has been held by some authorities that reflection will occur in this case, since we can divide the transition layer into a large number of planes, each one of which will reflect a small amount. Even if this were the case, we should have complete destructive interference, for the wave-trains reflected from the hypothetical planes would be gradually and progressively displaced with reference to each other and give us zero for a resultant. The same thing may be considered as taking place in the case of the resonators. A rigorous theoretical treatment of the resultant effect of the radiations from a system of closely packed resonators, excited by plane-waves, considering several different depths of penetration, is much to be desired.

A question of considerable theoretical importance in connection with the lateral scattering of light by a resonator is whether or not there is any trace of polarization of the scattered light. If the resonating system in the molecule swings to and fro in the plane of the exciting vibration, which is the simplest picture which we can form of a resonating molecule, we should expect

the emitted light to be completely plane-polarized in the same sense as with finely divided particles suspended in a liquid. Repeated observation with Nicol prisms by various observers failed, however, to show any traces whatever of polarization in the fluorescent light emitted by vapors. I finally observed the phenomenon with the vapor of metallic potassium, using a Savart plate as an indicator of polarization.

It was immediately picked up in the fluorescence of sodium and iodine, and it is probable that other vapors will be found to show it as well.

The apparatus used in the work consisted of a steel tube with a lateral branch brazed to its centre for the observation of the fluorescent light at an angle of  $90^\circ$  with the exciting beam. This tube was used in the earlier work upon fluorescence, before the expedient of "end-on" examination had been adopted. The metal was contained in a small retort also brazed to the large tube, immediately below the lateral observation-tube. The light of the arc was focussed by a large lens at the centre of the large tube immediately in front of the lateral branch. Owing to the sensitiveness of the Savart plate, which is capable of showing 1 per cent of polarization, it was necessary to eliminate all other possible sources of polarization, such as fog or mist in the tube. Exhaustion with a Gaede mercurial pump while the tube was heated was sufficient to completely banish all trace of fog.

The complete absence of fog can be told by illuminating the vapor with an intense beam of light embracing the spectrum region comprised between wave-lengths 5400 and 5700, obtained by prismatic dispersion. Such a beam is incapable of exciting any fluorescence, and if fog is absent the cone of light is absolutely invisible when viewed through the lateral tube. The Savart fringes were very distinct, and the percentage of polarization was determined by compensating it with a pair of glass plates which could be turned about on a vertical axis furnished with a graduated circle. The first measurements were made with the exciting light polarized (electric vector) vertically.

It was found that the polarization was strongest when the temperature of the tube was comparatively low, *i.e.* when the fluorescence first appeared. At a higher temperature, with very bright fluorescence, compensation was secured with a single plate at an angle of  $59^\circ$ , or with two plates at an angle

of  $47^\circ$ . Taking the refractive index of the glass as 1.52, and making use of the formula which expresses the ratio of the amplitudes of the components of the vibration in and perpendicular to the plane of incidence,

$$\frac{D_s}{D_p} = \frac{E_s}{E_p} \cos(\phi - \chi),$$

we find the percentage of polarization to be 20.

At the lowest temperature consistent with a fairly bright fluorescence compensation was secured with two plates at an angle of  $52^\circ$ . This gives us 30 per cent of polarized light. The change in the intensity of the fluorescent spot when viewed through a slowly revolving nicol was easily observed in this case, and a separate determination was made by Cornu's method, which gave 28 per cent of polarized light.

If the exciting beam was polarized with its electric vector horizontal, no trace of the Savart fringes could be detected, which was to be expected, as everything was then symmetrical about the line of sight.

If the exciting light was unpolarized to start with, the fluorescent light was found to be polarized, but not to the same extent, the percentage in each case being one-half of its former value, which was also to be expected. The question at once arose as to why we have only a partial polarization of the fluorescent light when we start with plane-polarized light.

Excitation of the vapor with monochromatic light causes it to emit this same wave-length and a large number of other wave-lengths, the spectrum exhibiting in the most typical case a number of very sharp lines spaced at nearly equal intervals along a normal spectrum. It was important to see whether the polarization was confined to the line corresponding to the exciting line, for it seemed not impossible that the electron vibrating in synchronism with the exciting light might emit light which was completely plane-polarized, whereas the other disturbed electrons might emit unpolarized light. The vapor was accordingly excited with the light of the cadmium arc, and the spectrum examined with a small spectroscope furnished with a Nicol prism. It was found, however, that the polarization was quite as strong in all parts of the spectrum as it was at the lines coinciding in position with the exciting lines. As a check on this observation the following experiment was then tried. The

light from the arc was passed through a filter which removed everything above wave-length 5000, *i.e.* which transmitted a deep blue light. In front of the Savart polariscope a dense screen of aurantia was placed, which cut off everything below 5000. This removed all the wave-lengths from the fluorescent spectrum which were to be found in the exciting light, transmitting, however, the upper end of the fluorescent spectrum. This light was found to be strongly polarized, the fringes appearing quite as distinct as in the absence of the screens. It will be observed that this experiment completely eliminates all possible sources of error, such as polarization produced by fog or by reflection from the back wall of the tube.

The *D* lines appear in the fluorescent spectrum stimulated by white light, and the spectroscope showed that they were polarized to about the same degree as the rest of the spectrum. As I have shown, the *D* lines can also be caused to appear by stimulation with blue light, but in this case they are too faint to make a study of their polarization possible.

The foregoing experiments prove that we must seek elsewhere for the cause of the partial polarization.

That there is a depolarizing agent is probable from the most elementary theory. If we assume the electrons to be free to move in any direction, under the influence of the electric forces in the light-waves, it seems probable that with a polarized beam of exciting light we should have plane-polarized light emitted by the vapor in directions making an angle of  $90^\circ$  with the exciting beam. If the stimulating light were plane-polarized to start with, there would be no fluorescent emission at  $90^\circ$  in directions parallel to the electric vector in the exciting light. In other words, the vapor would behave in much the same way as a fog composed of very fine particles, though the physical processes involved would be quite different in the two cases.

The earlier work on the dispersion of sodium vapor showed that it became strongly fluorescent when traversed by a powerful beam of light, a phenomenon which had been previously observed by Wiedemann and Schmidt. A careful spectroscopic study of the spectrum of the fluorescence of the vapor was commenced in 1903 and is still in progress, for there seems to be no end to the new and remarkable phenomena yielded by this vapor under varying conditions. The spectrum of the light is made up of an enormous number of fine lines, which in the

yellow and yellow-green region are arranged in groups or bands, which lie close together in the vicinity of the  $D$  lines, widening, however, as the blue region is approached. Coincident with the  $D$  lines there appears a hazy band (the surrounding region being nearly devoid of light), which, if the vapor is not too dense, can be resolved into a double line, the components of which coincide with  $D_1$  and  $D_2$ . These lines appear not only when the vapor is stimulated with light of the wave-length of the sodium lines, but also when a powerful beam of blue-green light is thrown into the vapor. This shows us that the mechanism which gives rise to the  $D$  lines is connected in some way with the one which produces the complicated channelled absorption spectrum. It has not yet been determined whether  $D_2$  is emitted when the vapor is excited by the light of  $D_1$ .

The rest of the fluorescent spectrum behaves in a very different manner. Stimulating the vapor with light of a deep violet color from the spectroscope produces no effect; as the wave-length is gradually increased a yellowish fluorescence appears, which spectroscopic examination shows to be made up of two parts, a reëmission of the same wave-lengths as those absorbed (blue) and the extreme yellow end of the fluorescent spectrum, comprised between wave-lengths 571 and 540. This portion consists of bands, which a high resolving power resolves into fine lines. As the wave-length of the exciting light is further increased, the point of maximum fluorescence moves down the spectrum, the first bands or groups of lines disappearing. In other words, as the exciting light moves up the spectrum, the fluorescent light moves down the spectrum. There is, however, in all cases an emission of light of the same wave-length as the exciting light.

The colored light used for exciting the fluorescence was furnished by a spectroscope, the eyepiece of which had been replaced by a slit, which transmitted light fairly monochromatic in character.

When the slits of this instrument were made very narrow, which rendered the exciting light still more homogeneous, the most remarkable phenomenon of all appeared. The spectrum was found to have changed from a band spectrum made up of countless fine lines to a fairly simple spectrum of some six or eight widely separated lines, spaced very uniformly. As the wave-length of the exciting light was gradually altered by turn-

ing the prisms of the monochromatic illuminator, the lines of the fluorescent spectrum appeared to move about in the liveliest manner. The whole spectrum appeared in motion, the luminous bands moving in a rippling manner, like moonlight on water. The motion was soon seen to be an illusion due to the continual disappearance and reappearance of the bright lines, the phenomenon reminding one forcibly of the scintillations produced on a zinc sulphide screen by the radium bombardment. This phenomenon led at once to the discovery of Resonance Spectra.

When a vapor or gas, illuminated by a powerful beam of monochromatic light, reëmits this light without change of wavelength, we may term the emitted light *Resonance Radiation*. Sodium vapor illuminated by sodium light is an example. Recent investigations, still in progress, have shown that mercury vapor at room temperature emits resonance radiation when excited by the ultra-violet light of wave-length 2536 emitted by the mercury arc. If, in addition, other monochromatic radiations are given out, we may term the spectra formed in this way *Resonance Spectra*. The best example is the vapor of sodium illuminated by the light of metallic arcs, previously decomposed by a spectroscope.

The vapor of sodium, obtained by heating the metal in a highly exhausted steel tube to a temperature of about 400°, yields an absorption spectrum of great complexity. In addition to the *D* lines and the other lines (ultra-violet) of the principal series, which come out reversed, we find the entire visible spectrum, with the exception of a very narrow region in the yellow, filled with fine and sharp absorption lines. This we shall call the channelled absorption spectrum, and we find it divided into two distinct regions, one extending from wave-length 4500 to 5700, and the other extending from about 5800 to the extreme limit of the red. Photographs taken with the 21-foot grating in the second-order spectrum show that it is even more complicated than was originally believed. We find, on the average, from 60 to 70 absorption lines within a space only 12 Ångström units in width; in other words, as many as 30 lines in a region not wider than the distance between the *D* lines. This means that in the blue-green channelled absorption spectrum, which is about 1200 A.E. in width, there are, roughly speaking, about 6000 absorption lines. Taken collectively these

lines form themselves into a number of groups, which resemble the groups seen in the absorption spectra of iodine and bromine, and in certain banded emission spectra.

To attempt to unravel this spectrum, or find any regularities in it by the usual means, is quite out of the question, for the lines are so numerous and so close together that we could pick out series that would conform to any law that we might choose to invent. In the method of resonance spectra, however, we possess a very beautiful experimental method of analyzing the spectrum and of determining just which lines belong together; a method, moreover, which may in time yield results which will enable the theoretical physicists to tell us the exact nature of the piece of machinery which we call the sodium molecule.

If we illuminate the vapor with a powerful beam of white light, it becomes strongly fluorescent, emitting a spectrum which is probably the exact complement of the absorption spectrum. This fluorescent spectrum is obviously of little help to us, for it is quite as complicated as the absorption spectrum. If, however, we throw monochromatic light into the vapor, instead of white light, we observe a very remarkable phenomenon. We now have a series of bright lines spaced at very nearly equal intervals along a normal spectrum, and separated by a distance equal to about 37 Ångström units. Various series of lines with varying distribution of intensity can be brought out by changing the wave-length of the exciting light. In every case, light of the same wave-length as that of the exciting light is emitted by the vapor, and in addition a large number of other frequencies, which bear a definite relation to each other.

A very large amount of experimental work has been done already, and as much or more remains to be done. It is impossible to give in a limited space a very satisfactory account of the work, and the reader is referred to the original papers, which will be found in the *Philosophical Magazine* and *Astro-physical Journal* from 1906 to 1909.

The wave-lengths of the lines in the resonance spectra excited by the monochromatic radiations from a cadmium-vapor lamp have been determined to within one or two tenths of an Ångström unit. It was found that stimulation of the vapor with the radiation of wave-length 4800 caused it to emit a series of bright lines spaced at intervals so nearly equal that a photo-



graph of the spectrum, made with a grating, resembled a centimetre measuring scale.

Whether the lines are in reality spaced at exactly equal distances is a matter of considerable importance, since theoretical treatments of the radiation emitted by electron systems disturbed in various ways can only be verified by the test of experiment. Professor Larmor has pointed out to me in a letter that a non-radiating system of electrons in steady orbital motion, when disturbed by the absorption of a radiation corresponding in frequency to the frequency of one of the electrons, should then emit radiations giving us a series of lines equally spaced along a normal spectrum. Excitation by the green line of cadmium gives a resonance spectrum consisting of a series of doublets, the components being a little closer together than the *D* lines.

The bismuth arc is by far the best exciter of the vapor which we have, and it furnishes the most typical resonance spectrum. It has but a single line which is operative, and this line is located in the remote blue. The resonance spectrum consists of a series in the blue, which with long exposures can be traced well up into the green, and a host of lines at the upper end of the spectrum in the yellow-green region.

The resonance spectrum excited by the green triplet (*b* group) of the magnesium arc is very remarkable, for we find the triplet reproduced more or less perfectly at regular intervals. If the spacing of the individual lines forming the series was the same for each series, it is clear that we should have the triplet reproduced over and over again along the spectrum. That this is so only to an imperfect degree is due to the difference in the spacing of the lines of the different series.

Fluorescence of sodium vapor has also been discovered in the ultra-violet, and in the course of this work it became necessary to make a study of the absorption spectrum of very dense vapor in this region. This investigation yielded as a by-product the discovery of the most complete Balmer series of spectrum lines observed up to the present time. Hitherto, the largest number of lines forming a Balmer series, ever observed in the laboratory, was observed by Cornu in the case of hydrogen, which can be made to show twelve lines arranged in accordance with the Balmer formula. Solar and stellar hydrogen shows nearly thirty lines, *i.e.* the series extends farther down into the ultra-violet than in the case of hydrogen excited to luminescence by

means at present at our disposal in the laboratory. In the case of the Balmer series of sodium, but seven members were known previously. The work upon the absorption spectrum raised this number to forty-eight, the largest number ever observed either in terrestrial or celestial sources. The further extension of the series is, in my opinion, only a question of a more powerful spectroscope and greater vapor density. The last 20 lines in the series, as observed in the present case, fall within a region of the spectrum equal in width to the distance between the two *D* lines. These ultra-violet absorption lines were found to be accompanied by band absorption spectra, analogous to the ones bordering the *D* lines, and a great deal of time was spent in studying the fluorescence in this region. The fluorescent light is of course invisible, which makes its study difficult. The sodium tube was closed with a large quartz lens, and powerful fluorescence excited with a Heræus zinc arc in quartz. The image of the green fluorescent spot was focussed upon the slit of a quartz spectrograph by means of a quartz lens. Under these conditions ultra-violet fluorescent light, if present, should appear in the spectrum. Such was found to be the case.

The banded fluorescent spectrum is strongest at some distance above the zinc lines (*i.e.* on the side of the longer wave-lengths). The intervention of a glass plate between the arc and the sodium tube caused the disappearance of the ultra-violet fluorescent bands, showing that they were due to the absorption of ultra-violet and not of visible light.

An attempt was next made to see whether any mechanical connection existed between the mechanisms which produced the *D* lines and the visible channelled spectra (which have been shown to be connected) and those producing the ultra-violet lines. The zinc ultra-violet triplet was isolated by means of a quartz spectrograph and focussed on the aperture of the sodium chamber. The room was absolutely dark, and all extraneous light carefully screened off. No visible fluorescence was observed. The ultra-violet fluorescence was, however, photographed with a second quartz spectrograph. In this case one is working wholly in the dark, and the difficulties attending the adjustment of the two optical trains may be well imagined.

This experiment indicates absence of connection between the two systems.

The converse experiment was next tried. Powerful stimulation by the entire visible spectrum failed to show any trace of the ultra-violet band in the spectrum of the fluorescent light, even though the visible region was overexposed tenfold. This again indicates absence of connection.

It looks very much as if the different lines of the principal (Balmer) series and their accompanying channelled spectra may be considered as produced by different entities. The enormous increase in vapor density necessary to bring out the higher members of the series may perhaps be ascribed to the possible circumstance that the entities producing them are present in smaller numbers.

It appears to me that there are two hypotheses which we may make: First, that the Balmer lines and their accompanying spectra are caused by atoms which have lost one, two, three, four, etc., electrons. Secondly, that they are produced by aggregates or complexes of one, two, three, or more atoms. In either case it seems probable that the members would be present in continuously decreasing numbers.

These experiments show in a striking manner the complexity of the piece of machinery which we call the sodium molecule. Professor Rowland once said that a molecule is much more complicated than a piano. In most cases all that we have been able to do is to strike the entire keyboard at once, but in the case of sodium it seems possible to strike one key at a time. A study of the fluorescent spectra of other vapors will doubtless do much to clear up the mystery of the mechanism of molecular radiation.

An extended investigation has also been made of the fluorescence of mercury vapor, which was first observed by Hartley, and is best shown by enclosing a drop of the metal in an exhausted quartz bulb, heating the bulb over a Bunsen burner turned down very low, and passing a powerful spark between zinc or cadmium electrodes placed as close as possible to the bulb. The color of the fluorescent light is a bluish green mixed with a good deal of white, *i.e.* it embraces a region of the spectrum extending from the red-yellow well down into the ultra-violet. The color of the fluorescent light varies somewhat with the nature of the electrodes used. The spectrum appears continuous, even with a concave grating of 2 metres radius.

A preliminary study of the absorption spectrum of mercury vapor resulted in the discovery of a very curious modification in the appearance of the ultra-violet band at wave-length 2536, caused by the presence of air or some other chemically inert gas. This band appears first as a pair of fine lines, not unlike the *D* lines in appearance, one of them ( $\lambda = 2539.4$ ) relatively much weaker than the other ( $\lambda = 2536.7$ ). As the density of the vapor increases, they fuse together, forming a single band which then widens in a remarkable manner towards the region of longer wave-length, its boundary on the other side remaining almost fixed in position.

If the bulb contains air or any other chemically inert gas at atmospheric pressure, the band widens *symmetrically* at first, attaining a width of about 8 Ångström units. Beyond this point a further increase in the density of the mercury vapor causes a widening in one direction only, as is the case when the vapor is *in vacuo*.

If, instead of sealing the mercury up in a bulb filled with air, we place it in a quartz flask provided with a long neck and gradually raise the flame below the flask, we find that the band first widens and then appears to drift towards the longer wave-lengths, without further increase in width. This apparent drift is due to the expulsion of the air by the boiling mercury, the band contracting on the short-wave-length side, as it widens on the other.

This action of the air in modifying the appearance and in some cases the apparent position of the absorption band cannot be attributed to chemical action, for the same effect was found with hydrogen, nitrogen, and helium. As we shall see presently, the vapor is deprived of its power of fluorescing when it is mixed with another gas.

It was found, by making a more careful study, that the effect of air upon the band at 2536 was a little more complicated than was at first supposed. *In vacuo* the broadening is almost entirely in the direction of longer wave-lengths. If air is present, a hazy band appears on the short-wave-length side of the line, and if the time of exposure and vapor density are just right, the band and line are separated by a narrow strip slightly lighter than the band. The union of this band with the line causes the broadening on the short-wave-length side. It was thought that perhaps this hazy band could be regarded

as the 2536 line shifted in position and broadened as a result of collisions with, or the proximity of, the air molecules. It seemed possible that by employing a very large proportion of air the band might be obtained by itself, *i.e.* without the simultaneous presence of the 2536 line.

A steel tube 3 metres long was mounted in a horizontal position, and loaded with 20 small porcelain boats containing mercury. The ends were closed with quartz plates, and the absorption of the mercury vapor, *in vacuo* and in air, at various temperatures, was carefully examined. It was found impossible to obtain the hazy band due to the presence of air without at the same time having the 2536 line.

Even at room temperature the absorption line at wave-length 2536 could be photographed without difficulty. On admitting air to the tube, the absorption band became much heavier and wider. This experiment is not open to the objections which can be raised in the case of a similar experiment made many years ago with sodium vapor, where only the central portion of the tube was heated, and there appears to be no question but that the same amount of mercury vapor is present in each case, the widening of the absorption band resulting from the increased pressure due to the admission of air, the effect being the same as that discovered by Ångström in the case of carbonic acid gas.

Returning now to the fluorescence of the vapor, we find that the spectrum is in the main continuous, extending roughly from the yellow down to wave-length 3000, with a very pronounced minimum at wave-length 3600. It was at first suspected that the visible band and the ultra-violet band might be excited by different radiations, and a week or more was spent in photographing the spectrum emitted by the vapor when stimulated by lines isolated from the spark-spectrum by an auxiliary quartz spectograph. Very little, if any, difference could be detected, however. It was found that if air was in the bulb it was impossible to excite any fluorescence. If, however, we boil the mercury in an open flask of quartz it fluoresces brightly as soon as it is in brisk ebullition, and if the absorption spectrum is photographed at the moment at which fluorescence appears, we find that the absorption band has contracted on its short-wave-length side to its position when the vapor is *in vacuo*, owing to the expulsion of the air by the boiling mercury.

There is in addition to the continuous spectrum a pair of bright lines which are not present in the spark-spectrum, and which coincide in position with the sharp absorption lines 2536.7 and 2539.4 shown by vapor of small density. It was at first thought that these lines were excited by the bright cadmium line which falls within the region of the expanded part of the absorption band. The zinc spark has a bright line which lies even nearer the mercury lines, and it was expected that the emission line would be stronger in the case of zinc excitation. No trace of them was found, however, and after a great deal of experimental work it was proved that its appearance resulted from excitation by the aluminum line at wavelength 1860, or by a group of cadmium lines of wavelengths shorter than any usually recorded in the spectrum of the metal.

These bright lines appear strongest when the vapor density is such that visible fluorescence does not quite appear. As the temperature is raised, and the visible fluorescence grows stronger, the 2536 line fades away and eventually disappears. The visible fluorescence of the vapor disappears also if it is superheated.

The exhausted quartz bulb, containing a drop of mercury, is heated from below by a small flame from a Bunsen burner until the fluorescence excited by a cadmium spark placed as close as possible is at its brightest. The small pointed flame from a blowpipe is then directed against the side for a few seconds. The fluorescence promptly disappears at the superheated spot, reappearing again as soon as the local heating is stopped.

If the ultra-violet light of the spark is focussed at the centre of the bulb by a quartz lens of short focus, a narrow cone of brilliant green light extends from the point at which the light enters the bulb nearly to the opposite wall. The flame of a blast-lamp, directed against the wall of the bulb at the point where the fluorescence begins, causes the luminous cone to retreat from the wall to a distance of several millimetres, much as the positive column separates from the cathode in a vacuum-tube discharge.

This effect is very remarkable and very difficult to explain. We can hardly attribute it to dissociation, for we regard the mercury molecule as monatomic. I have been unable to find any change in the appearance of the absorption spectrum as a

result of superheating, and in view of more recent experiments upon the causes operative in destroying the fluorescence of a gas, it seems very important to examine the electrical character of the vapor over the temperature range between 600° and 800°.

An extensive series of experiments has also been carried on with the vapor of iodine, which shows a brilliant fluorescence *in vacuo*, but remains quite dark if air is present at a pressure of more than 6 or 8 cms.

The fluorescence manifests itself to the best advantage when the vapor is formed in a high vacuum. A glass bulb from 10 to 30 cms. in diameter, and containing a few flakes of iodine, is highly exhausted on a mercurial pump and sealed. The fluorescence at once appears when a beam of sun- or arc-light is focussed at the centre of the bulb by means of a large condensing lens, no heating of the bulb being necessary. The cone of fluorescent light is yellowish green and of great intensity, and can be shown to a large audience in a darkened room.

\* \* \* \* \*

*Note added December, 1910*

I have recently discovered that iodine vapor gives resonance spectra when stimulated with monochromatic light, analogous in every respect to those found with sodium vapor. The green line of the mercury arc excites a resonance spectrum made up of 9 or 10 lines about 100 Ångström units apart, most of them being in the red and yellow. It will doubtless be possible to effect the analysis of the complicated band spectrum of iodine in the same manner as that of sodium, and study the behavior of resonance spectra in a magnetic field.

The destruction of the fluorescence by air or other gases seemed at first sight to be the result of collisions of the molecules (as first suggested by Lorentz), the phenomena requiring time for their development. The heating of a gas by absorption of radiant energy must in some way result from a transformation of the energy stored in the molecule during absorption (which we may regard as potential) into kinetic energy at the moment of collision. That is, the velocity of the rebound is increased by actions or motions going on within the molecule. If we consider that the molecule is capable of storing energy up to a certain point, after which further absorption results in a re-emission of radiant energy (fluorescence), and if we further

assume that at the moment of collision the stored energy is liberated, or spent in increasing the molecular velocity, it is clear, if the time interval between collisions is sufficiently small, that the internal energy of the molecule cannot be increased up to the point at which fluorescence manifests itself.

If we examine bromine, which shows a similar absorption spectrum, in the same way, we find no trace of fluorescence. We can explain this by assuming for the bromine molecule a greater capacity for storing energy. In other words, the path cannot be increased sufficiently to allow the saturation point to be reached before a collision occurs.

Some as yet unpublished experiments appear to be in accord with this theory. By sufficiently increasing the length of free path, we ought to be able to observe fluorescence, provided that a sufficient number of molecules remain to produce a visible illumination. A small amount of bromide vapor was introduced into a bulb, and condensed upon the wall by the application of solid carbon dioxide and ether. The bulb was then exhausted to the highest possible degree and sealed. On warming it to room temperature, the bromine vaporized, and though it was so highly rarefied that it showed no color, no fluorescence could be detected.

Sunlight was now concentrated at the centre of the bulb by means of a portrait lens having a ratio of focus to aperture of 2.3. Even in a dark room with careful screening off of diffused light no fluorescence could be detected. The outside of the bulb was now touched with a piece of solid carbon dioxide, which gradually condensed the bromine upon the wall. In two or three seconds a faint green fluorescence appeared, which vanished almost immediately, owing to the complete removal of the bromine vapor. There appears then to be one density at which bromine shows a visible fluorescence. At higher densities collisions destroy it; at lower there are too few molecules present. This appears to be in accord with our hypothesis regarding absorption of energy, saturation point, but further investigations have shown that there is another factor to be considered.

A photometric study of the intensity of the fluorescence of iodine as influenced by the presence of various gases mixed with it was made. The results enable us to test any hypothesis regarding the action of the gas in destroying the fluorescence. The intrinsic intensity of the fluorescence, when the



vapor, in a high vacuum, was illuminated by sunlight concentrated by a large F. 2.3 Voigtlander portrait objective, was over one-quarter that of a Welsbach mantle, the color match being made by a screen of light yellow glass combined with a very dilute solution of Prussian blue.

The reduction of the intensity caused by the admission of air and hydrogen is shown in the following table:—

If we plot these results we find that the curve for air lies below the one for hydrogen. With  $\text{CO}_2$  and ether vapor curves still lower down were obtained, showing that the molecular weight of the gas was operative in destroying the fluorescence as well as the pressure. The subject has been more fully investigated in collaboration with J. Franck, who had found that the distances which electrons can travel in a gas are greatly reduced if traces of an electro-nega-

AIR + IODINE		HYDROGEN + IODINE	
Pressure	Intensity	Pressure	Intensity
0	44.7	0	45
.5 mm.	41.3	1.2	38
1	34.5	2.0	31
2	26.5	3	28
3	22.0	9	18
4	16.5	18	12
5.5	12.8	34	5.8
9	10.6	50	4.3
10	9.5	78	3.0
16	5.8	100	1.5
20	4.3		
40	2.4		
57	1.5		
88	0.7		

tive gas are present. Electro-negative gases, such as chlorine, oxygen, and to a lesser degree hydrogen, exerted very powerful effects in inhibiting the movements of the free electrons, and it appeared possible that they might also be effective in damping the vibrations of bound electrons. Photometric measurements were made to determine the reduction in the intensity of the fluorescence due to helium, argon, oxygen, nitrogen, hydrogen, and chlorine. Hydrogen and argon gave superposed curves, notwithstanding the fact that argon is much heavier. Helium, which is also heavier than hydrogen, had a much smaller effect upon the fluorescence, the intensity of which, when the iodine is in helium at 16 mms. pressure, is about the same as when it is in hydrogen at only 5 mms. In helium gas, at a pressure of 2 or 3 cms., the fluorescence was distinctly reddish. This was found to be due to the remarkable fact that helium reduced the intensity of the green

portion of the fluorescent spectrum to a greater degree than the red. Curves were drawn from observations made through red and green color filters. It is probable that helium reduces the intensity of the fluorescence solely as a result of the damping of the vibrations by collisions. The same may be true of argon. The action of the other gases is to be ascribed to their electro-negative character in part. Chlorine, the strongest electro-negative gas studied, at 2 mms. pressure reduced the intensity as much as air at 2 cms. There thus appear to be two factors at work, one dependent upon the weight of the molecule, the other upon its electrical character.

In the course of these experiments a very remarkable effect of molecular collisions upon the resonance spectrum of iodine was discovered. The fluorescence spectrum of the vapor, when stimulated with white light, resembles closely the band spectrum emitted by sodium vapor under the same conditions. If we stimulate it with the monochromatic green light of the mercury arc, we get a series of 15 bright narrow lines about 70 Ångström units apart, one line for each band of the channelled spectrum. If, however, we have helium gas (which has been shown to affect the fluorescence *not* by electro-negative qualities) present at a pressure of only 2 mms., a most remarkable change in the resonance spectrum is found. The sharp equidistant lines have faded to about  $\frac{1}{10}$  of their original intensity, and the complete banded spectrum, consisting of innumerable fine lines, appears. The total amount of light emitted is about the same in the two cases. The collisions with the helium molecules appear to couple the electron systems together, so to speak, so that monochromatic stimulation produces a fluorescence spectrum very similar to that excited by white light. Chlorine gas, which affects the fluorescence chiefly by its electro-negative qualities, as has been shown, reduces the intensity of the resonance spectrum *without causing the appearance of the banded spectrum*. These two different effects are very important, and the question should be investigated from a theoretical standpoint.

\* \* \* \* \*

The optical properties of these vapors in a magnetic field have been examined as well, chiefly from the standpoint of their magneto-rotatory power. A quantitative study was first made of the selective rotatory power of sodium vapor in the

vicinity of the  $D$  lines. A steel tube, containing a fragment of metallic sodium, was passed through the hollow armatures of an electro-magnet. The ends of the tube were closed by glass plates, and the pressure reduced to a few millimetres.

Light from a heliostat, or an arc-lamp, was passed in succession through a Nicol prism, the steel tube, a second nicol, and then concentrated on the slit of a spectroscope. If the instrument has a large dispersion (a 14-foot concave grating was used in the present case) all of the phenomena now to be described can be seen.

The nicols are set for complete extinction and a small flame placed beneath the tube. As soon as the vapor begins to form, two very bright lines will appear in the position of the  $D$  lines the moment the magnet is excited. These lines represent the constituents of the white light, which are rotated through  $90^\circ$  by vapor and passed by the analyzing nicol. The lines are in reality double, though their duplicity cannot be made out when they first appear. As the density of the vapor increases, the components separate, four lines being distinctly visible. The lines continue to separate, and presently a second pair appears between them for which the rotation is  $270^\circ$ , the dark regions between representing rotations of  $180^\circ$ .

With a further increase in the vapor density the outer lines ( $90^\circ$ ) separate still farther, and widen out into broad flares of light, other lines appearing between them corresponding to larger rotations, the system resembling a set of diffraction fringes. These bright lines represent rotations of  $270^\circ$ ,  $450^\circ$ ,  $630^\circ$ , etc., and by measuring their positions with an eyepiece micrometer, the wave-lengths corresponding to these rotations were determined. The centre of the system, as we may designate a point midway between  $D_1$  and  $D_2$ , becomes bright and dark in succession, as many as eight complete alternations having been observed in some instances. This corresponds to a rotation of  $1440^\circ$ . If the burner is removed, the changes take place very rapidly, the centre "winking" bright and dark almost as rapidly as one can count.

Various methods were used for measuring the rotation for different regions of the spectrum in the vicinity of the  $D$  lines, and the results were used in testing the formula for the magnetic rotation of an absorbing vapor.

In the course of these experiments the magnetic rotation

spectrum of the vapor was discovered, which is intimately related to the fluorescence spectrum, though not identical with it.

With the apparatus just described a very remarkable phenomenon appears when the vapor has considerable density. With the nicols crossed and the magnet excited, the transmitted light, when examined with a prism spectroscope, will be found to form a most beautiful bright line spectrum, resembling the emission spectrum of a metallic arc. Over two hundred lines can be counted in the red, and about one hundred and thirty in the blue-green region.

These lines have been photographed with a 14-foot concave grating, and found to coincide with absorption lines, the significant fact being, however, that comparatively few of the absorption lines are represented in the rotation spectrum. Just why this is so is not apparent. The rotatory power of an electron is probably inversely proportional to its mass. The lighter the electron in proportion to its charge, the greater will be the perturbations in its orbit produced by the magnetic field. It is possible that the absorption lines which exercise rotatory power result from the negative electrons of small mass, while the other absorption lines are due to heavier corpuscles, perhaps carrying positive charges. The fact that the bright lines of the fluorescent spectrum appear to coincide with those of the magnetic rotation spectrum favors this hypothesis, for we should expect the lighter electrons to be set in more violent vibration by the light-waves than the heavier ones. The lines were found to form groups, which could be identified by comparison with the fluorescent spectrum. All trace of the rotation disappears if hydrogen or nitrogen at a pressure of more than a few centimetres is present in the tube; this is also true for the fluorescence. Iodine vapor also gives a very beautiful bright line spectrum. A few crystals are introduced into a small glass bulb which is highly exhausted and sealed off from the pump. This bulb, when placed between the perforated conical pole pieces of a Ruhmkorff magnet (nicols crossed) and gently warmed, restores light of a most beautiful emerald green color, which the spectroscope shows to be discontinuous. It is instructive to prepare two bulbs, one exhausted, the other at atmospheric pressure. The latter shows no effect whatever.

The greater part of the evidence which has been obtained

thus far regarding the structure of the atom indicates that the centres of vibration which emit the spectral lines are negatively charged corpuscles. The positive charges appear to be associated with the atom as a whole, and the assumption is often made that the positive electrification is of uniform distribution.

The Zeeman effect shows us that the *D* lines of sodium are due to vibrators carrying negative charges, a fact which is true of all other lines which show the effect. That a negative charge is associated with the centres of vibration which emit the *D* lines is also shown by the direction (positive) of the magnetic rotation of the plane of polarization, for waves of very nearly the same frequency as that of the *D* lines. As is well known, most band spectra do not show the Zeeman effect at all, consequently we are unable to apply this test to the investigation of the nature of the charge associated with the centres of emission of the lines of which the bands are made up. Quite recently Dufour has observed the effect in some band spectra, however.

Some of the lines which make up the complicated channelled absorption spectrum of sodium vapor have been found to have the power of rotating the plane of polarization when the light is passed through the magnetized vapor in the direction of the lines of force, as we have just seen.

It is of the utmost importance to determine the nature of the rotation which gives rise to this multitude of bright lines, *i.e.* whether it is positive or negative.

In the case of the rotation for wave-lengths in the vicinity of the *D* lines, there is no difficulty in determining the direction, for the broad bands of rotated light which border the absorption lines can be moved from side to side by slight rotations of the analyzing nicol; or we may employ the device so frequently used, the Fresnel double prism of right- and left-handed quartz, which tells us at a glance the direction of the rotation. In the case of the narrow lines of the channelled spectra, no information can be gathered as to whether the rotation is positive or negative by rotating the analyzing nicol, for the smallest possible turn from the position of extinction causes the continuous spectrum to brighten up, obliterating the rotation lines.

An attempt was first made to employ metallic arcs in place

of the white-hot crater, as the source of the light, on the chance that some of the lines might be of the right wave-length to suffer rotation in the region of the channelled spectra. If any of the lines were found to be rotated by the vapor, the direction of the rotation could be easily determined by rotating the analyzing nicol until they were extinguished. No lines were found, however, which had just the right wave-length. It seemed possible, however, that the selective rotatory power of the vapor could be utilized to furnish a source of light made up of just the right wave-lengths; in other words, magnetized sodium vapor between crossed nicols could be used as a light filter. The light passed by the crossed nicols when the magnetic field was excited was accordingly sent through another magnetized tube of vapor and examined with a third nicol and spectroscope. It was hoped that by setting the third nicol for extinction, and causing the bright line spectrum to appear again by excitation of the second magnet, it would be possible to determine the direction of rotation of the lines by observing in which direction it was necessary to rotate the third nicol in order to blot them out. The first magnet, with its sodium tube and polarizing prisms, delivers plane-polarized light of exactly the wave-lengths of the bright lines of the magnetic-rotation spectrum. This light is then passed through a second magnetized tube of sodium vapor, a Nicol prism, and a spectroscope. The nicol having been set for extinction, the bright line spectrum disappeared, reappearing again as soon as the magnet was excited. It was found, however, that rotation of the third nicol was wholly without effect on the appearance of the lines, notwithstanding the fact that the light was originally plane-polarized. *The magnetized sodium vapor appeared to have completely depolarized the light.* The cause of this phenomenon is not difficult to explain. The lines which make up the magnetic-rotation spectrum, though they appeared as narrow as the iron arc-lines in a photograph made two years ago with a concave grating of 12 feet radius, are not in reality monochromatic. The action of an absorption line is to rotate the plane of polarization of waves of nearly the same wave-length through various angles depending on their proximity to the absorption line. It is these waves which are transmitted by the nicol. The line therefore has a finite, though narrow, width, and the second tube of magnetized vapor rotates the monochromatic

constituents, of which the line is made up, through various angles. Some of the light in the line is therefore passed by the third nicol in every position.

The experiment which finally showed clearly the nature of the rotation was made with a pair of Fresnel quartz-prisms. This combination consists of two wedges, one of dextro-, the other of laevo-rotary quartz. Its action is described in the next section. They were much thinner than those usually employed, as it was felt that it would be better to work with a single broad band of extinction than a large number of parallel bands. The magnetically rotated lines are faint in comparison with the continuous spectrum from which they are derived, and it is consequently important to have the background upon which they are to show up as dark as possible. With a thick Fresnel prism we have the continuous spectrum at its full intensity traversed by a number of parallel dark bands, which correspond to the points on the slit at which the plane of polarization is parallel to the plane of extinction (long diagonal) of the analyzing nicol, which is placed immediately behind the slit. There is in consequence more or less diffused light from the grating, which renders the background (the dark bands), upon which the rotated lines are to appear, much too luminous. To get rid of this effect, the best method is to use a thin prism, and cover the slit except for a small portion immediately above and below the single dark band of extinction.

With this arrangement of the apparatus the magnetically rotated line should penetrate the dark band from above or below, according to whether the rotation is positive or negative. If we excite the magnet and gradually heat the sodium tube, we see sharp needles of light shoot down from the continuous spectrum into the dark region immediately to the right and left of the *D* lines, as has been described by Macaluso and Corbino, Zeeman, and others. If we reverse the magnetic field, the needles of light shoot up from below. The direction in which the plane of polarization is rotated by the *D* lines indicates that they are caused by vibrations of negative electrons. The important question to be answered is whether the absorption lines of the band spectra rotate the plane of polarization in the same or in the opposite direction, and whether they all behave alike.

The magnetic-rotation spectrum being much brighter in the

red and orange than in the green and blue region, the first observations were made in this part of the spectrum. The spectroscope was a medium-sized instrument, consisting of a telescope and collimator of about 180 cms. focus, furnished with a plane grating.

The sodium tube was heated until the fine black absorption lines in the red appeared distinctly in the continuous spectrum above and below the horizontal dark band due to the Fresnel prism. The current was then thrown into the magnet, the self-induction of which is so great that the field does not rise to its full intensity for several seconds, so that there was plenty of time to see exactly what happened. As soon as the switch was closed, numerous needles of light commenced to penetrate the dark region, *some of them shooting down from above, others shooting up from below*. Of these, some only extended halfway or less across the dark band, while others crossed it completely. On opening the switch the luminous needles slowly withdrew from the dark background into the bright region from which they came, reminding one of the tentacles of an alarmed hydroid. The phenomenon is most beautiful and shows us at once that some of the absorption lines rotate the plane of polarization in the positive direction, while others rotate it negatively.

On the elementary theory we should infer from this experiment that positive electrons were present as well as negative. We are hardly justified in this, however, as it is possible to explain the two types of rotation in other ways, *e.g.* by a reversal of the magnetic field within the atom.

As yet no attempt has been made to study the resonance spectra emitted by vapors in a magnetic field. An investigation of this question is sure to yield results of the greatest importance, if the experimental difficulties can be overcome. Excitation of spectra by stimulation with light-waves has an enormous advantage over electrical excitation, in that we know exactly what we are doing to the vapor (unless all of our present notions regarding light are erroneous), and the nature of the excitation is not altered by altering the conditions of the vapor. In electrical excitation, however, we know next to nothing about what the current is doing to the vapor, and every change which we make in the discharge tube, whether it be an alteration of density or an admission of some other gas, changes the current density, potential gradient, etc. The problem of the emission



of luminous energy by the molecule is enormously simplified by forcing its vibrations by means of light-waves of known frequency, which are not altered or changed in any essential degree by changes or modifications which we may make in the medium the radiations of which are being studied. The field is an enormous one, and the work which I have briefly outlined can be regarded as only a very small beginning.

# CERTAIN PHYSICAL PROPERTIES OF THE IRON CARBIDES, TOGETHER WITH INFERENCES DEDUCIBLE THEREFROM

BY CARL BARUS, PH.D., LL.D.

*Professor of Physics in Brown University*

**1. Introductory.**— In accordance with the request of Professor A. G. Webster that the papers read embody the personal experiences of the reader, I shall have the honor of bringing before you a series of researches on the iron carbides, prosecuted in their earlier stages by Dr. V. Strouhal (now Professor of Physics at the University of Prague) and myself, conjointly, and in their later developments continued by myself alone. I shall, therefore, have to report what was then found (1879–1890), without reference to more recent or to kindred experiments, which may have since been contributed by others. Much of our work was digested in the earlier Bulletins of the U. S. Geological Survey, papers which are now out of print. The present summary is thus in a measure justified.

1. Bulletin U. S. G. S., No. 14, 1885, pp. 1–238. Electrical and Magnetic Properties of the Iron Carburets; by C. Barus and V. Strouhal.

Bulletin U. S. G. S., No. 27, 1884–5, pp. 1–51. Electrical Resistance, Temperature, and Density of Iron Carburets; by C. Barus and V. Strouhal.

Bulletin U. S. G. S., No. 35, 1886, pp. 1–61. Physical Properties of the Iron Carburets; by C. Barus and V. Strouhal.

Bulletin U. S. G. S., No. 40, 1885–6, pp. 99–131. Effect of Sudden Cooling, etc.; by C. Barus and V. Strouhal.

Bulletin U. S. G. S., No. 49, 1891, pp. 1–139. Viscosity of Solids; by C. Barus.

Bulletin U. S. G. S., No. 94, 1892, pp. 1–138. Mechanism of Solid Viscosity; by C. Barus.

In its broader bearings our work may be viewed as an attempt to get different series of systematic observations, in as many directions as possible, from the physical behavior of one and the same body. Such data, though somewhat old-fashioned in character, may even at the present day offer distinct contributions; for instance, to electronic theory in case of solids,

particularly in relation to electrical conduction, volta and peltier contacts and magnetism. They also present a number of stimulating problems, capable of very exact corroboration, to the physical chemist.

**2. The Phenomenon of Temper in Steel.** — If an iron carbide is heated to a temperature exceeding a critical value in red heat, and, thereafter, cooled with the utmost speed possible, it will after cooling exhibit the maximum of hardness for the given body. Red-hot tool steel suddenly plunged into water (an operation technically known as quenching) becomes brittle and hard enough to scratch glass.

On the other hand, if an iron carbide is cooled from the same temperature in red heat, as slowly as possible, the cold metal will show the maximum of softness or plasticity for the given body. Steel so treated will approach the plasticity of iron. The operation is called annealing.

Finally, if a hard or glass-hard iron carbide is reheated to different temperatures and allowed to cool, it will show any of the intermediate degrees of hardness between the two extremes specified. This operation is called tempering, though (less correctly) the term annealing may also be applied to it. Temper thus embraces all states of hardness, including the extremes. The most important states of temper are obtained by reheating the quenched iron carbide (in alloy or vapor baths) to a definite temperature between about  $50^{\circ}$  and  $350^{\circ}$  C, for varying lengths of time to be considered later, § 3.

The temperature in low red heat to which an iron carbide must be heated to be glass-hardened is closely related to the phenomenon of "recalcescence" in iron, studied by Barrett, Osmond, Roberts-Austen, and others. I may enumerate Gore's sudden volume expansion, the sinuous and broken line in Tait's thermo-electric diagram for iron, the sudden disappearance of magnetic susceptibility as treated by Gore, Bauer, and others, Jeans's critical cementation temperature, Chernoff-Barus's sudden appearance of glass hardness on quenching from a series of increasingly higher temperatures, Chwolson's minimum resistance, Barus and Strouhal's unique maximum of magnetization in steel and maximum of viscosity, etc.

In our experiments with steel the rods were tempered by heating them electrically and, at the proper time and temperature, plunging them instantly into cold water by aid of a

special apparatus which need not be described here. The rods so obtained were remarkable for hardness and homogeneity, a property which could be accurately tested by comparing the resistances of successive lengths of the rod, in a manner<sup>1</sup> similar to that used in calibrating thermometers.

Our treatment of the subject began with an endeavor to detect some simple electrical property of the iron carbides, which would vary continuously and over as large an interval as possible with the temper of the metal. Two of these properties,<sup>2</sup> almost equally useful, were found. In the first place, the specific electrical resistance,  $s_0$ , of steel varies from about 15 to 45 microhms per cubic centimeter, *i.e.*, about threefold, as the metal passes (caet. par.) from the extreme of soft to the opposite extreme of hard state. The relation is continuous, and thus furnishes a wonderfully sensitive criterion of hardness in steel. In the second place, the shift of the thermo-electric power of steel,  $a_0$ , in any suitable couple, is equal to about 13 microvolts per degree Centigrade at 0° C., as the metal changes from soft to hard. This long range variable, while almost equally adapted for accurate measurement, has the additional advantage of being independent of the shape or dimensions of the metal examined.

Each of these criteria was accepted, at the outset, as a mere empiric expression of the states of hardness of steel. It will appear in the sequel, § 5, however, that more than this is implied; in other words, that either of the electrical qualities may be regarded as varying proportionally to the number of hard molecules present in soft iron. It is probable, therefore, that they are true measures of hardness, as they demonstrably vary in marked degree only when the change of hardness is correspondingly pronounced.

In passing I may state that the present paper, though dealing primarily with the properties of temper peculiar to iron carbides like steel, will nevertheless have a general bearing on all allied changes of the states of hardness of metals, like those produced by such mechanical treatment as drawing through a wire plate (drawn strain), by torsion, etc. In fact, it is the viscosity of the metal which is primarily involved in all these experiments, § 11.

<sup>1</sup> Strouhal and Barus, *Ann. der Physik*, X, pp. 326-330, 1880.

<sup>2</sup> Barus, *Ann. der Physik*, VII, pp. 333-414, 1879; *Phil. Mag.*, VIII, pp. 341-368, 1879. Strouhal and Barus, *Ann. der Physik*, XI, pp. 930-977, 1880.

**3. Laws governing the Variations<sup>1</sup> of Temper.** — If we regard the specific electrical resistance of steel as measuring its temper, the diagrams of Fig. 1 show the variation of the latter quality and its dependence on the temperature,  $T$ , of the bath in which the tempering of the glass-hard steel rod takes place, and of the time,  $t$ , of exposure of the rod to the temperature of the bath. Temperature, therefore, is not the only condition of securing a softer state from a harder; the time during which this action takes place is often equally important. The rate at which the temperature diminishes at a given temperature gradually decreases through infinite time, very slowly and gradually at low temperatures ( $< 200^{\circ} \text{C.}$ ), very rapidly, indeed almost suddenly at first and then again slowly at high temperatures ( $> 200^{\circ} \text{C.}$ ).

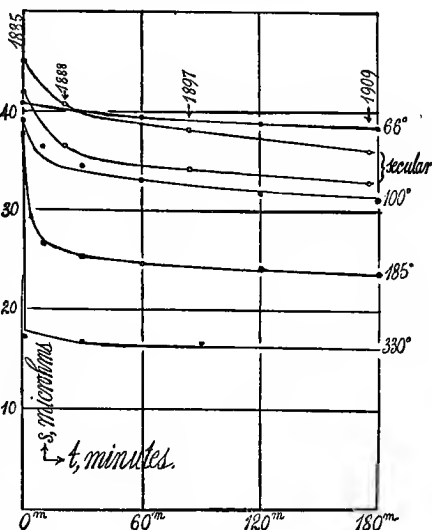


FIG. 1. — Temper (electrical resistance,  $s_0$ ), temperature and time,  $t$ , including data for secular tempering at atmospheric temperatures.

The final state of hardness corresponding to any temperature is reached asymptotically in time.

Moreover, the temper effect produced by any temperature,  $T$ , is independent of the preëxisting effects of the temperature,  $T'$ , and is not influenced by subsequent applications of the latter, if  $T > T'$ . This law is more fully applicable as the limits of hardness of  $T$  are more fully reached. Special experiments were made to test these facts.

The changes of temper found when this quality is rated in terms of the thermo-electric power of the rod are precisely the same. Figure 2 shows the results obtained when the steel rods are successively combined with pure silver.

**4. Relations of Thermo-electric Power,  $a_0$ , and Specific Electrical Resistance,  $s_0$ .** — The equation underlying the variations of thermo-electromotive force,  $e$ , of any couple, with the temperatures

<sup>1</sup> Strouhal and Barus, *Ann. der Physik*, XI, pp. 930-977, 1880.

of its junctions, was given by Avenarius and by Tait, and may be written without further theoretical import,

$$(1) \quad e = a\tau(1 + b\sigma),$$

where  $\tau$  is the difference and  $\sigma$  the sum of the temperatures of the junctions. The constant,  $a = a_0$  when  $\sigma = 0$ , was used in our work throughout. Hence  $b$  is here merely a temper-

ature coefficient, but it embodies Thomson's specific heat of electricity.

A comparison of the thermo-electric power,  $a_0$ , and the specific electrical resistance,  $s_0$  (at  $0^\circ$  C.), for different states of hardness of the same kind of steel, in case of nearly 100 rods, gave the results given in Fig. 3.

The steel rods were all combined with the same sample of pure silver to make the thermo-couples. The constants of silver were then

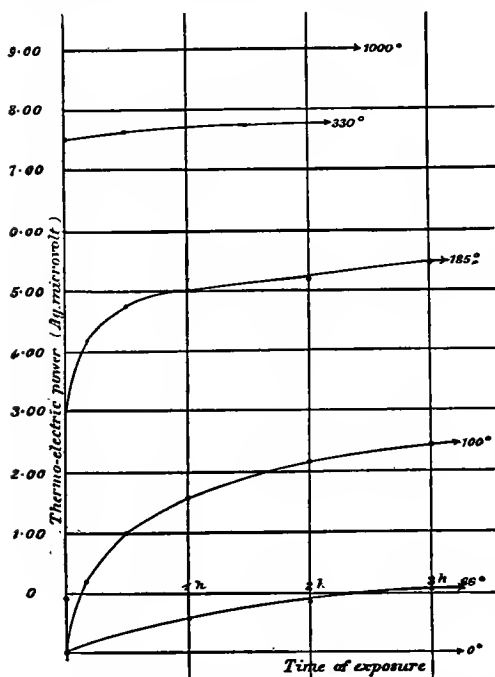


FIG. 2. — Temper (thermo-electric power,  $a_0$ , relative to silver), temperature, and time.

eliminated as follows. Fig. 3 shows that the relation of the thermo-electric power relative to silver and the specific resistance of steel is unquestionably linear, or

$$(2) \quad a_0 = m + ns_0.$$

The constants  $m$  and  $n$ , computed by the method of least squares from all the wires, were found to be

$$m = 15.176 \text{ microvolts,} \quad n = -.4123.$$

$$\text{Hence} \quad (m - a_0) = h_0 = ns_0. \quad (3)$$

The variable,  $h_0$ , so obtained, we called the thermo-electric hardness of steel. Thermo-electric hardness thus refers to a couple, one metal of which is a rod of the specific resistance (and therefore of the hardness) zero, subject to the given law, and the other the given rod whose hardness is  $h_0$ . Hence  $h_0$  is independent of metals other than steel.

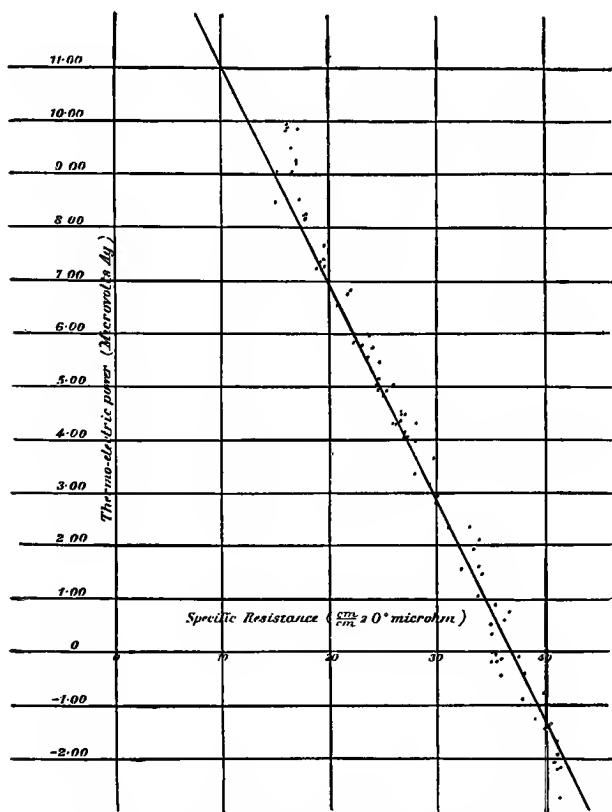


FIG. 3.—Relation of thermo-electric power,  $a_0$ , and specific electrical resistance,  $s_0$ , when varying with temper.

5. Thermo-electric Hardness,  $h_0$ , and Specific Resistance,  $s_0$ , probably True Measures of Hardness.<sup>1</sup>—In the tempered steel rod let there be two phases, a hard and a soft phase. Let the hard (I) and the soft (II) molecules lie side by side, so that in a given right section of the rod the area of hard molecules is  $q$  and of soft molecules  $(1 - q)$  per square centimetre.

<sup>1</sup> Barus, *Phys. Review*, XXX, pp. 347–349, 1910.

Then if  $s$  refers to specific resistance and  $a$  to thermo-electric power for the two phases specified by subscripts,

$$(4) \quad \frac{1}{s} = \frac{q}{s_1} + \frac{1-q}{s_2}.$$

$$(5) \quad \frac{a}{s} = a_1 \frac{q}{s_1} + a_2 \frac{1-q}{s_2}.$$

This follows from Kirchhoff's laws. Eliminating  $q$  from these equations

$$(6) \quad a = \frac{a_1 s_2 - a_2 s_1}{s_2 - s_1} + \frac{a_2 - a_1}{s_2 - s_1} s, \text{ or } a = m + ns,$$

which is the experimental result, equation (2), discussed in § 4. Hence the thermo-electric power of steel,  $a$ , is necessarily a linear function of its specific resistance,  $s$ , when both vary with temper alone, if but two phases, hard and soft, are present, arranged in parallel. We may write for  $r$ , the ratio of the number of hard to the number of soft molecules per cubic centimetre of tempered steel,

$$(7) \quad r = \frac{q}{1-q} = \frac{1/s_2 - 1/s}{1/s - 1/s_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda - \lambda_1},$$

i.e., the position which the electrical conduction  $\lambda$  takes between the conductions  $\lambda_2$  and  $\lambda_1$  of extremely soft and extremely hard steel. From this point of view, moreover, the phenomenon of temper as exhibited in § 3 becomes an admirable test of a law, adequately broad to express dissociation in solid media, subject to time and temperature.

The linear relation is true for steel, but not true for alloys in general, where  $a$  and  $s$  (as we found in extensive experiments),<sup>1</sup> frequently show looped curves.

Such a case would, however, be the necessary result of the presence of more than two phases in these alloys. Thus if there are three phases, I, II, III,

$$(8) \quad a = \frac{a_2 s_3 - a_3 s_2}{s_3 - s_2} + s \left( \frac{a_3 - a_2}{s_3 - s_2} + \frac{q_1 s_3 (a_1 - a_2) + s_1 (a_2 - a_3) + s_2 (a_3 - a_1)}{s_3 - s_2} \right).$$

<sup>1</sup> Strouhal and Barus, *Abhandl. der K. Boehm. Gesell.*, XII, p. 325, where a number of silver alloys are treated. Cf. Bulletin U. S. G. S., No. 14, Chapter III, p. 80 et seq.



Since  $q_1$  varies with  $s_1$ ,  $a$  is not linear in  $s$ . A hypothesis would be necessary to determine the relation of  $q_1, q_2, q_3$ . If  $q_1$  is equal to zero, equation (6) for steel is reproduced.

To summarize, therefore: in as far as steel may be regarded as a mixture of hard and soft phases only, both the thermo-electric hardness,  $h_0$ , and the specific resistance,  $s_0$ , are true measures of the degree of occurrence of the hard phases, and therefore of the hardness of the tempered metal.

6. The Temperature Coefficient,  $\alpha$ , of Specific Electrical Resistance,  $s_0$ .—This was found to vary from  $\alpha = .0052$  for soft iron to

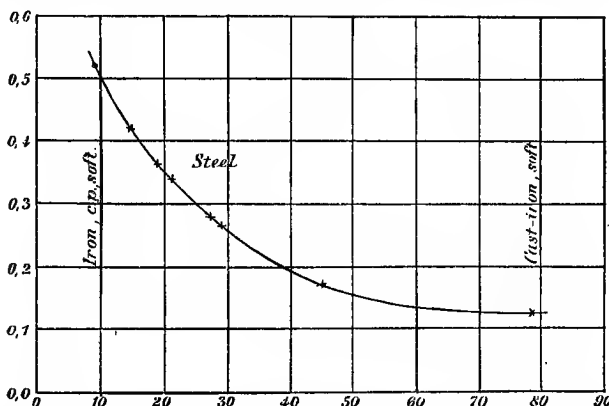


FIG. 4.—Temperature coefficient,  $\alpha$ , of  $s_0$ , varying with the specific resistance,  $s_0$ , of iron carbides.

$\alpha = .0013$  for hard steel and cast iron. The data are shown in Fig. 4, where the temperature coefficient,  $\alpha$ , is laid off in terms of the corresponding specific resistance,  $s_0$ , of the metal at  $0^\circ \text{C}$ ., indicating a continuous series of values. The curve is closely hyperbolic; in other words, the data<sup>1</sup> show

$$(9) \quad (s_0 + .78)(\alpha - .0001435) = .0682,$$

$$(10) \quad \text{or} \quad \alpha = \frac{.0620}{s_0} + .000303.$$

Hence the relation between the temperature coefficient and the specific electrical conductivity of iron carburets, when the carburization varies only, is linear, the temperature coefficient being greater in proportion as the conduction is better. This result seems to be applicable to alloys of any given metal quite gen-

<sup>1</sup> Strouhal and Barus, *Ann. der Physik*, XX, pp. 525-536, 1883.

erally. Thus, in a series<sup>1</sup> of alloys of platinum with different amounts of a great variety of other metals, the temperature coefficient conformed closely to the relation

$$(11) \quad \alpha_0 = \frac{.0378}{s_0} - .000194.$$

Figure 5 shows the relation of temperature coefficient (ordinates) and electrical resistance (abscissas) for the platinum

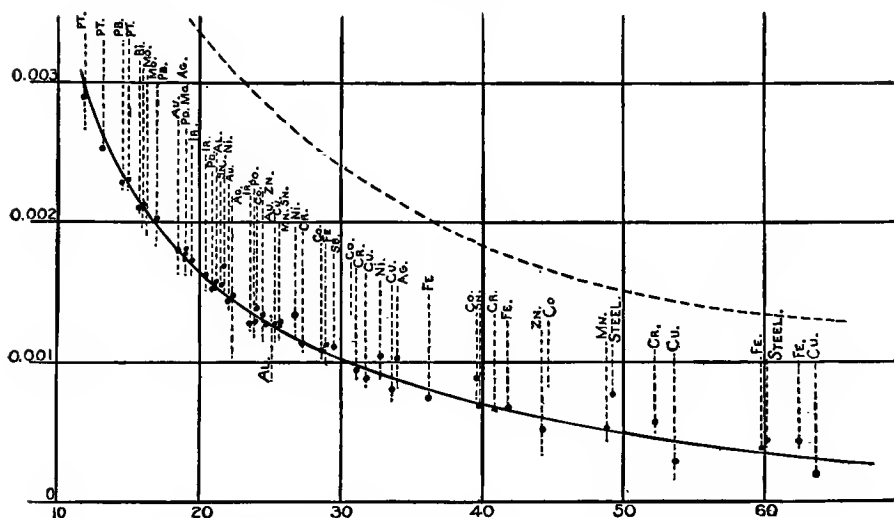


FIG. 5. — Temperature coefficient,  $\alpha$ , varying with the specific resistance of platinum alloys.

alloys investigated, graphically. Figure 6 is an inversion of the same diagram and of Fig. 4. Hence a law of this nature must be predicted by any adequate electronic theory of resistance.

7. The Physical Classification of Iron Carbides. — Let the process of quenching and the process of annealing as described in § 2 be applied to all iron carbides in succession. Let the specific resistance,  $s_0$ , or the thermo-electric hardness,  $h_0$ , be determined for both of these states, for each metal. Finally, let the discriminating function

$$(12) \quad \Delta \log s = \log s_1 - \log s_2, \text{ or } \Delta \log h = \log h_1 - \log h_2,$$

*i.e.*, the difference of the logarithms of the electrical data for the hard and soft states of the same metal, be constructed in

<sup>1</sup> Barus, *Am. Jour. of Sci.*, XXXVI, pp. 427-442, 1888.

terms of the total carburation of the product. These curves, as experimentally obtained, are shown in Figs. 7 and 7a. The figures also contain values of  $\Delta \log s$  and  $\Delta \log h$ . It appears at once that the physical definition of steel is appropriately

(13)

$\Delta \log s = \text{maximum.}$

In other words, the process II moves the metal nearest to, and the process I removes it farthest from, soft iron. Now in any given series of iron carburets, in which the percentage of carbon contained alone varies, steel is that particular product which is capable of existing in the greatest number of states of hardness relatively to the soft state; and this is precisely the meaning of equation 13. As the variation of such a function in the neighborhood of a maximum is usually small, there will be a number of carburets of

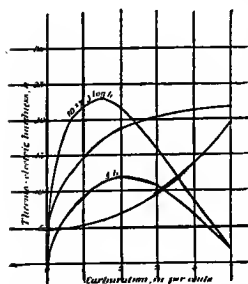


FIG. 7. — Thermo-electric hardness of annealed and of quenched iron carbides and the increments,  $\Delta h$  and  $\Delta \log h$ , of each.

Furthermore, if the diagram be completed, as in Fig. 8, by adding a third variable to express the ratio of combined and uncombined carbon, the absolute magnitude of the extreme values  $s_2$  and  $s_1$  determine the chemical position of the steel in such a diagram; whereas the intermediate values between  $s_2$  and  $s_1$  de-

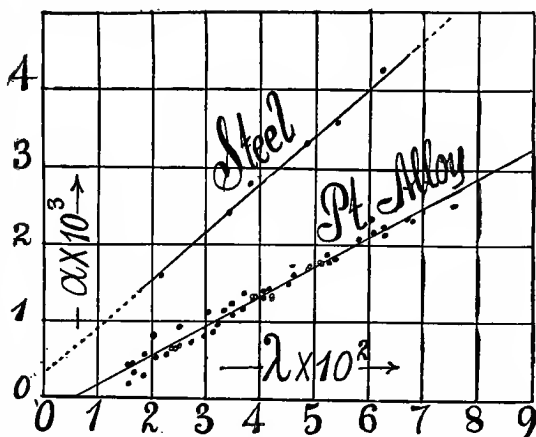


FIG. 6. — Temperature coefficient,  $\alpha$ , varying with the electrical conductivity,  $1/s = \lambda$ , of iron carbides and of platinum alloys.

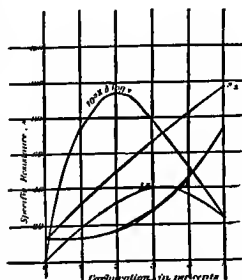


FIG. 7a. — The same data for specific resistance (electrical hardness).

termine the state of hardness of the specific metal defined by  $s_2$  and  $s_1$ , conjointly. The surface determined by the variable  $s$  (constructed as  $z$ ), the quantitative carburation (total carburation,  $x$ ), and the qualitative carburation (the ratio of combined to uncombined,  $y$ ) define all possible iron carbides, if we regard the impurities present as being of the nature of parameters. There will thus be one surface for each combination of foreign ingredients other than carbon.

The surface  $\Delta \log z = \Delta \log s$  is ridged throughout its extent

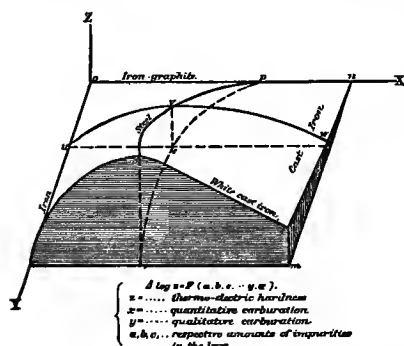


Fig. 8. — Diagram for the classification of iron carbides;  $x$ , total carburation;  $y$ , ratio of combined to uncombined carbon;  $z$ , thermo-electric hardness.

in the  $y$  direction, and the line of this ridge determines the continuity of possible steels.

8. Miscellaneous Experiments. Temperature and Density,  $\rho$ . Polarization Figures of Prince Rupert Drops. Hydro-electric Effect of Temper. Oxide Coats. — I will here describe a number of experiments which were carried out with care at some length, but which led to no broader

outlook. Temper decreases with the density,  $\rho$ , of steel, as was first systematically shown by Fromme. A large number of similar experiments of our own made in density flasks with fine steel rods gave an exhibit of the relation of density to the electrical or hardness of steel in detail. In hard rods (harder than blue temper, first stage of temper) there is a large variation of resistance,  $s_0$ , and a relatively small variation of density,  $\rho$ . In soft rods (softer than blue temper, second stage), however, the case is reversed. When the rods are tempered to more and more marked conditions of softness,  $s_0$  passes through a minimum; but the corresponding density did not seem to pass through a maximum, as was anticipated. The experiments, however, owing to changes of carburation at red heat, are very difficult to perform in a way that is quite trustworthy. Figure 9 is an exhibit of these results.

Similarly a large number of experiments was made to determine the *radial distribution of density* in glass-hard thick rods,

by etching off the successive layers. These results usually showed marked increase of density, *i.e.*, decrease in hardness

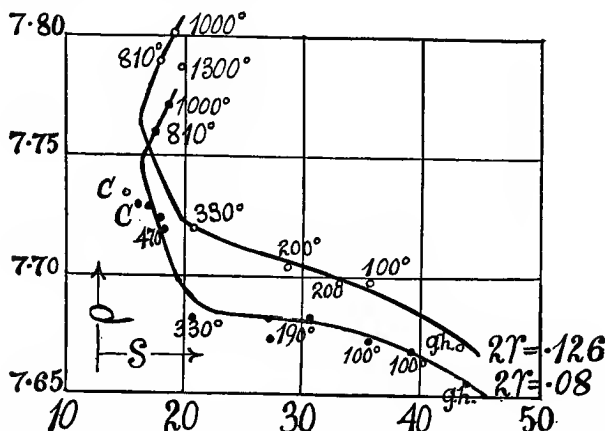


FIG. 9. — Density and specific resistance of steel, showing first and second stages of temper.

toward the core of the rod. In other cases, however, the reverse was true in an equally marked degree; or the glass-hard rod actually increased in hardness toward the core. The distribution of density from shell to shell seemed to be periodic; but the whole subject is involved, and further experiments should be made to adequately elucidate it. Figure 10 shows the distribution of density (mean) as the rod decreases in diameter.

Since *Prince Rupert drops* are obtained by a process of intense quenching, their structure might be supposed to show relations similar to those of glass-hard steel. These drops were carefully studied<sup>1</sup> both by the aid of their density,  $\rho$ ,

<sup>1</sup> Barus, *Am. Jour. of Sci.*, XXXI, pp. 439-452, 1886; *ibid.*, p. 386, 1886; *ibid.*, XXXII, pp. 181-192, 1886; *ibid.*, XXXVII, pp. 339-351, 1889.

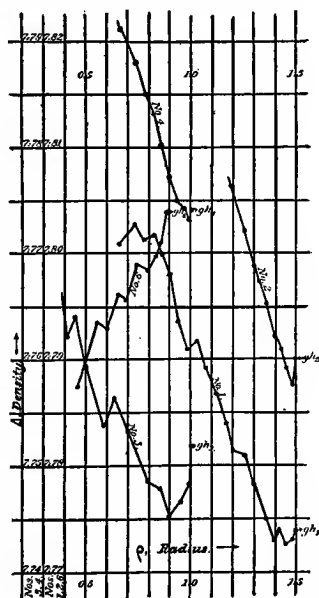


FIG. 10. — Density of successive cores of a thick steel rod.

and by the polarization figures between crossed Nicol's prisms. As the tempering progresses, the former is too greatly influenced by the contraction of the vacuum bubbles contained ( $\rho = 2.432$ , strained to  $\rho = 2.442$ , annealed) to be trustworthy. The polarization figures, however, are available; but they do not vanish completely for a temperature of the annealing bath, even as high as  $450^\circ$ . Both the figures and the vacuum bubbles vanish together at  $550^\circ$ , the density now increasing to  $\rho = 2.453$ . The disappearance of polarization figures naturally follows the law of temper as given in § 3, and is subject to time and temperature. It is not probable, however, that the strain appreciably changes the hardness of glass.

The *hydro-electric effect of temper*<sup>1</sup> is such that steel becomes more electro-negative, as it is harder. Hence the soft metal is etched off first, if hard and soft parts occur together. Data of a similar kind were also investigated (by a special potentiometer) for mechanical strains, such as tension, etc.

Attention was finally given to the *oxide coats*<sup>2</sup> on steel (Bulletin U.S.G.S., No. 27, pp. 51-61), which are such invaluable criteria of temper, in the arts. They do not seem, however, to be rigorously or ultimately trustworthy. Thus, whereas an exposure to  $300^\circ$  imparts the blue color practically at once,  $200^\circ$  will also impart it, in an exposure of several hundred hours. This subject has as yet been but little investigated from a purely scientific point of view; but it is very interesting, inasmuch as it presents a case of solid diffusion, *i.e.*, of the diffusion of a gas through a solid film in response to a concentration gradient. It is probable that solid diffusion will present the same relation to liquid diffusion that solid viscosity presents to liquid viscosity. In both cases the solid phenomenon progresses at a gradually decreasing rate, through infinite time, whereas the liquid phenomenon is steady.

**9. Viscosity and Temper,  $\eta$  and  $T$ .** — The elastic coefficients of steel vary in relatively small degree with temper. We did not, therefore, enter into their consideration systematically. If,

<sup>1</sup> Barus, *Am. Jour. of Sci.*, XXXII, pp. 376-383, 1886. Barus, *American Chemical Journal*, XII, pp. 1-13.

<sup>2</sup> Barus, *Nature*, XLI, pp. 369-371, 1890. *The Molecular Stability of Metals*.

however, the elastic constant, *i.e.*, modulus =  $\frac{\text{stress}}{\text{strain}}$ , is replaced by the viscous constant, *i.e.*, viscosity =  $\frac{\text{stress}}{\text{strain per second}}$ , results of marked importance in their bearing on the theory of viscosity in solids, and particularly adapted to elucidate, if not confirm, Maxwell's theory of viscosity, are forthcoming; for the viscosity of steel in its relation to temper<sup>1</sup> is enormously variable.

The apparatus used in these experiments was usually of a bifilar type, in which the unknown steel wire, as one component of the bifilar, was countertwisted against a *normal wire* (usually thoroughly annealed at 450° C.), as the other component under otherwise identical conditions. If the length of each wire is  $l$  and the total twist of each of the system of two wires  $\psi$ , the specific twist will be  $\tau = \frac{\psi}{l}$ . The reversal of  $\psi$  was an easy possibility and useful for the usual purpose of showing the effect of the past history of the wire. The remote ends of the wires being fixed, their junction, provided with a mirror, moved in virtue of viscosity, over an angle  $\Delta\Phi$  in the lapse of time,  $t$ , in the direction determined by the wire of greater viscosity. The datum,  $\Delta\Phi = \Phi - \Phi' = f(t)$ , was directly observed, and  $\phi - \phi' = \frac{\Delta\Phi}{l}$  radians per centimetre of length of wire constructed therefrom. These results are shown in Fig. 11, where  $\psi = \pm 180^\circ$ . The first reading is made one hour after twisting, to escape the enormous viscous deformation during the first hour.

In Fig. 11 the results are shown for the case in which the standard rod is glass-hard,  $\phi - \phi'$  being the differential deformation per centimetre of rod, for the rate of twist,  $\tau = 6^\circ$ , per centimetre of length,  $l$ , at the temperature of observation,  $\theta = 20^\circ$ , for the various states of temper (annealed at  $T$  from glass-hard) in the lapse of time,  $t$ , in hours.

The question as to which of the wires of the bifilar is the less viscous, *i.e.*, yields to the other, is left open; but direct observation showed that this is invariably the *harder wire*. In other words, viscosity increases, *i.e.*, steel is more solid in pro-

<sup>1</sup> Barus and Strouhal, *Am. Jour. of Sci.*, XXXII, pp. 444-466, 1886; *ibid.*, XXXIII, pp. 20-36, 1887.

portion as it is softer. Soft steel is thus akin to tallow, hard steel to sealing wax, to use Maxwell's terms of comparison. Thus in Fig. 11 it is always the glass-hard standard that yields most, the wire tempered or annealed at  $450^\circ$  being most viscous. It is not, therefore, the differential flow or deformation, but the differential viscosity which is virtually repre-

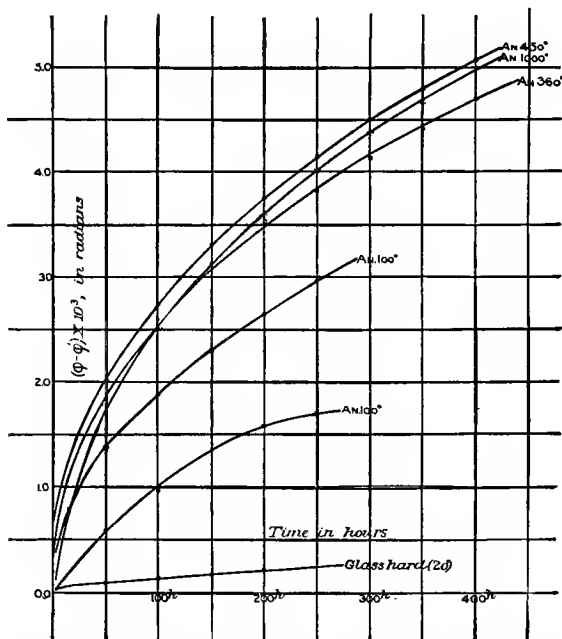


FIG. 11. — Torsional viscous deformation per centimetre in the lapse of hours, of tempered (annealed at  $T$ ) rods, combined bifilarly with same glass-hard standard. The latter yields.

sented, a fact of which we were still ignorant when the diagram was made.

Hence the reciprocal viscosity  $\left(\frac{1}{\eta}\right)$ , thermo-electric hardness,  $h_0$ , and specific electrical resistance,  $s_0$ , are qualities which vary together, and whose variations are largely confined to the first stage of temper ( $T < 450^\circ$ ).

Anticipating the more detailed analysis below, § 13, the theory of the bifilar is such that

$$(14) \quad \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta'} = \frac{1}{n\tau} (\dot{\phi} - \dot{\phi}') \\ = 10^{-11} (\dot{\phi} - \dot{\phi}'),$$



where the deformation per centimetre,  $\phi - \phi'$ , is observed in the lapse of time (seconds) and  $n$ ,  $\eta$ , and  $\tau$  are the rigidity, the viscosity, and the rate of twist of the steel wire.

The figure shows a retrogression between  $450^\circ$  and  $1000^\circ$ . There is probably coincidence between the state of maximum viscosity and of maximum magnetic susceptibility, etc., referred to §§ 2, 15, etc. In other words, a wire tempered from glass-hard at a certain temperature between  $450^\circ$  and  $1000^\circ$  will probably show a unique condition with regard to its physical constants.

10. Dependence of Viscosity,  $\eta$ , on the Temperature,  $\theta$ , of the Wire, at Different States of Temper (Annealed or Tempered from Hard at  $T^\circ$ ).—The investigation of the temperature effect<sup>1</sup> is peculiarly fruitful in its bearing on Maxwell's theory of viscosity, since the occurrence of unstable configurations in the wire is rapidly

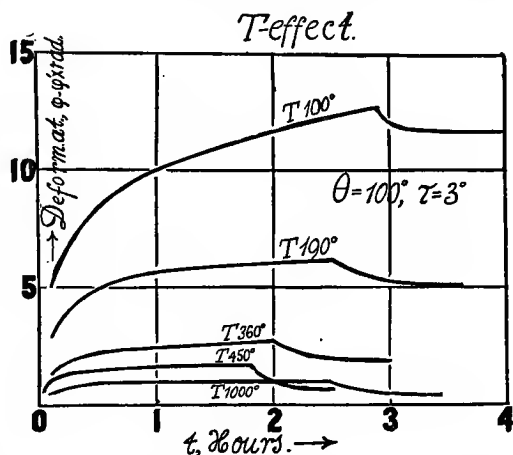


FIG. 12.—Torsional viscous deformation per centimetre, in the lapse of hours, of steel rods tempered at  $T$ , combined bifilarly with the same soft standard ( $T = 450^\circ$ ) exposed at  $\theta = 100^\circ$  and under twist,  $\tau$ , per centimetre.  $T$  effect.

more marked in proportion as  $\theta$  is larger in relation to  $T$ .

Examples of the results obtained with the bifilar (in which the standard wire is now of maximum viscosity—tempered at  $T = 450^\circ$ —so that the deformation of the other wire of the bifilar is actually given) are reproduced in Figs. 12, 13, 14. These show the differential deformation,  $\phi - \phi'$ , in the lapse of hours, when the temper,  $T$ , temperature,  $\theta$ , rate of twist,  $\tau$ , are systematically varied. When the experiment is interrupted, there is a retrogression ( $\phi - \phi'$  diminishes) as temperature decreases to normal values. Hence the wire which has yielded most recovers in greater measure. It is possible that this is due to the elastic temperature coefficient, and has no bearing

<sup>1</sup> Barus, *Am. Jour. of Sci.*, XXXIV, pp. 1-19, 1887.

on viscosity. Inferences must be reserved. Frequently the increase of  $\phi - \phi'$  is so rapid that only a short time of observation is possible.

Obviously the effect of temperature is more marked, *i.e.*, viscosity decreases with  $\theta$  at much greater rates when steel is hard than when it is soft. Hence the deformations shown by the curves are very largely due to the yield in the wire, by whose temper (tempered at  $T^\circ$  from glass-hard) the curve is

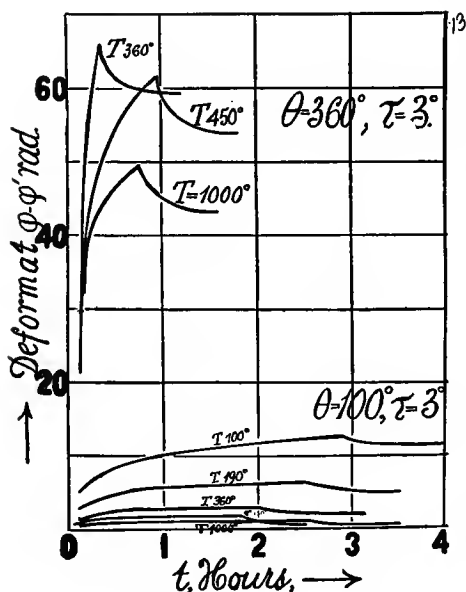


FIG. 13.—The same.  $\theta$  varied.

specified. Again, if we designate as above, § 8, all wires for which  $T' < 450^\circ$  as being in the first stage of temper, and all wires for which  $T' > 450^\circ$  as in the second stage, variations of viscosity with temperature are marked during the former and nearly vanish during the latter. This is again closely in keeping with the behavior of the corresponding electric and magnetic effects.

Glass loses viscosity in case of increasing

temperature less rapidly than hard steel, the former having no peculiar instability.

Finally, the viscous deformation per centimetre,  $\phi - \phi'$ , increases much more rapidly (2 to 10 times) than the rate of twist,  $\tau$ , under otherwise like conditions. Hence viscosity varies with stress, decreasing as stress increases. In the case of steel wires .082 cm. in diameter this observation introduces peculiar relations: when  $\tau < 3^\circ$ , steel is less viscous and more susceptible to temperature (the deformation more marked) as it is harder; when  $\tau > 6^\circ$ , steel is less viscous and more susceptible to temperature as it is softer. In other words, the new instabilities introduced by stress preponderate in soft steel.

Magnetization has no effect on viscosity, showing that configurations open to magnetic influence lie within the configuration determining viscosity (cf. § 18). Elastically, however, the rigidity coefficient of magnetization<sup>1</sup> is more marked as the wire is thinner and softer and the phenomenon is largely confined to the second stage of temper.

**11. Maxwell's Theory of Viscosity.** — Maxwell left his theory of viscosity in shape of a terse verbal sketch, in which form it has entered many text-books, as for instance Tait's "Properties of Matter," § 253. The theory was formulated by Butcher. It is a version or an adaptation of Williamson's theory of etherification and of Clausius's theory of electrolysis. Maxwell postulates mechanically unstable molecular groups. As they break down in the lapse of time, owing to the heat motion within the body, the latter yields to stress. There is thus a close analogy between the ions in an

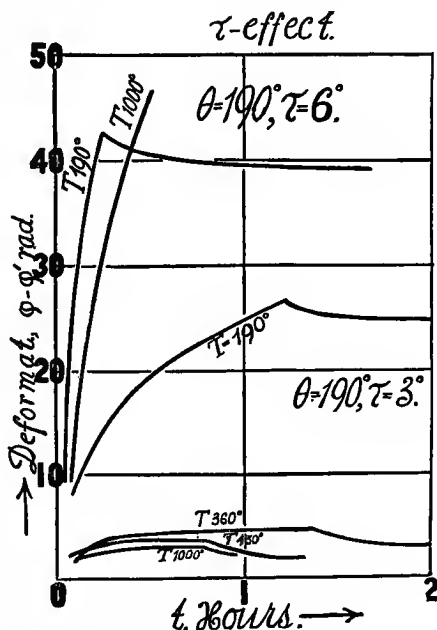


FIG. 14. — The same.  $\tau$  varied.

electrolyte in relation to electric intensity and the mechanically unstable molecular groups in relation to stress, though the two phenomena play on entirely different stages. It is the pre-existence of the unstable configurations that makes stress effective in the lapse of time, in producing flow, though stress may in special and relatively rare circumstances actually produce new instabilities. In a viscous fluid the instabilities are practically infinite in number. In a viscous solid their number is finite and exhaustible. This is therefore the case of an electrolyte in which the available ions are gradually removed by electric force.

The advantage of hard steel as a test<sup>2</sup> of the theory lies in

<sup>1</sup> Barus, *Am. Jour. of Sci.*, XXXIV, pp. 175-186, 1887.

<sup>2</sup> *Ibid.*, XXXVI, pp. 178-208, 1888. *Phil. Mag.*, XXVI, pp. 183-217, 1888.

this, that it contains both thermally and chemically unstable groups and that the latter may be recognized by their *débris*. Soft steel contains thermally unstable groups only. Hence in tempering steel the number of available instabilities may be varied over an enormous range, from their maximum occurrence in glass-hard steel to the minimum in the soft metal. In fact, the removal of unstable groups takes place in hard steel, even at ordinary temperatures, in the lapse of long ranges of time (§ 14).

In addition to the instabilities due to temper or due to temper and temperature, a group similar to the last may be introduced due to mere mechanical strain<sup>1</sup> in the phenomenon of accom-

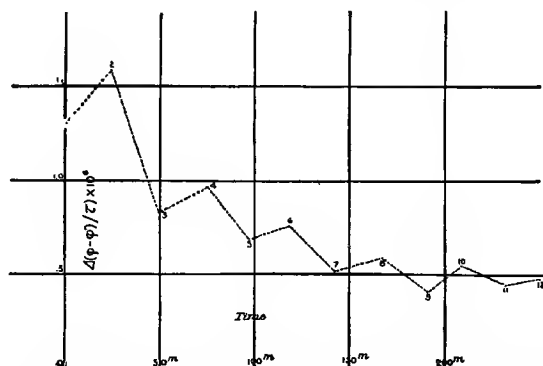


FIG. 15. — Torsional viscous deformation per centimetre, per unit rate of twist, successively applied to a glass-hard steel rod, in opposite directions, during nearly equal intervals of time. Accommodation.

modation (Wiedemann, Streintz), in which viscosity is changed by successive reversal of the sign of the twist,  $\tau$ . The wire gradually increases in stiffness (motional tempering). Ultimately as many configurations are broken down during the action of stress as are reproduced afresh by the same stress. The wire then shows fixed viscosity within the given limits. In Fig. 15 the zigzag line reproduced the deformation of a glass-hard steel wire when the stress,  $\tau$ , and its time of action,  $t$ , (2 to 4 minutes) are constant in value,  $\tau$  being alternately positive and negative. The large drop between the second and third deformation should be noted.

Figure 16 shows a systematic group of data giving the deformation of hard steel tempered at  $T^\circ$  and observed at  $\theta^\circ$  C.,

<sup>1</sup> Barus, *Phil. Mag.*, XXVII, pp. 155-177, 1889.

two temperatures,  $\theta = 20^\circ$  and  $\theta = 100^\circ$ , being contrasted. These curves, though obtained independently, are virtually an adjustment of Fig. 11, seeing that in the latter case the standard was hard and therefore of minimum viscosity, whereas in Fig. 16 the standard is soft and of maximum viscosity.

Finally, in Fig. 17 wires to which different intensities of drawn strain, or torsion, have been imparted, or which are

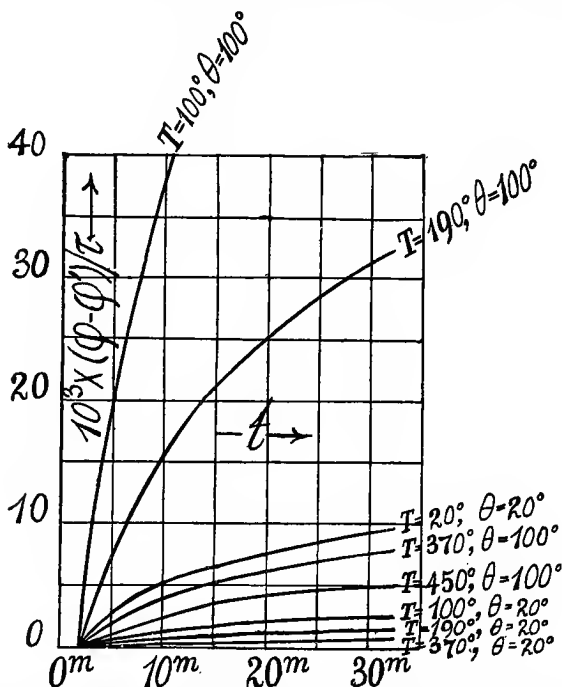


FIG. 16. — Torsional viscous deformation per centimetre, per unit rate of twist in the lapse of minutes, for rods tempered at  $T$ , combined bilyarily with the same soft normal and exposed during observation to  $\theta = 20^\circ$  and to  $\theta = 100^\circ$ .

under traction, are compared with the corresponding case of temper. The normal wire is soft and of maximum viscosity. Under intense traction, for instance, the wire is even less viscous than if glass-hard; in other words, the instabilities present are excessive in the former case.

It is exceedingly interesting to note that the drawn strain which markedly increases resiliency nevertheless decreases viscosity. In other words, a hard-drawn wire, like a hard-tempered wire, is nearer the liquid state than an annealed wire of the same metal.

The interpretation of all these several results is so immediately in the spirit of Maxwell's theory that further comment is needless.

**12. Absolute Viscosity of Solids.**<sup>1</sup>—If the stress of the wire of maximum viscosity in the bifilar apparatus hitherto used is

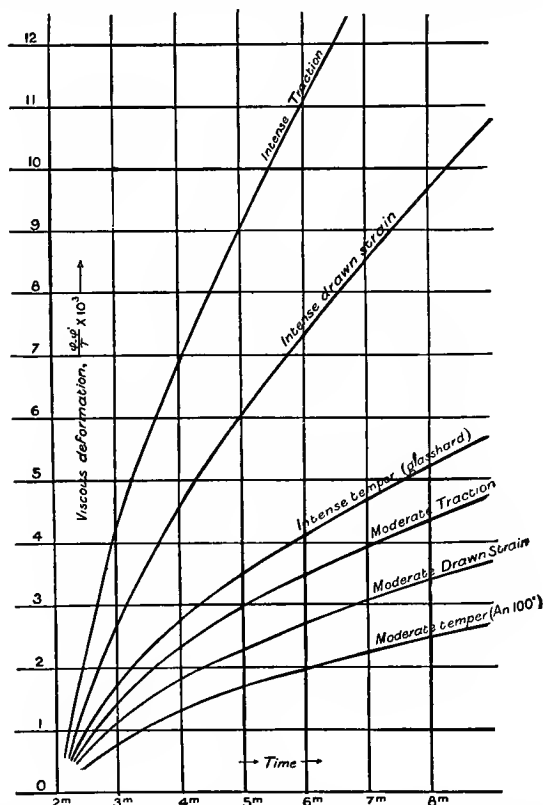


FIG. 17. — Viscous deformation per centimetre, per unit rate of twist, in the lapse of minutes for rods tempered at 20° and 100°, under drawn strain and traction, respectively, and combined with the same normal (soft) standard.

replaced by gravitational stress, the apparatus (Fig. 18) is suitable for the measurement of viscosity absolutely. *AA* and *BB* are torsion heads, *ww* the wire to be tested. The cross beam *MM* carries the weight *P* for the application of torque to *ww*, *vv* being a vein kept in water for damping vibrations. *N* is the mirror for indicating the torsional deformation,  $\phi$ , in the lapse of time. It will be seen that such an apparatus is virtu-

<sup>1</sup> Barus, *Phil. Mag.*, XXIX, pp. 337–355, 1890.

ally a friction brake, but the friction is here purely viscous. Let  $\phi$  radians be the deformation per unit of length,  $T = PL$  the total torque in action, or twice the torque actuating each

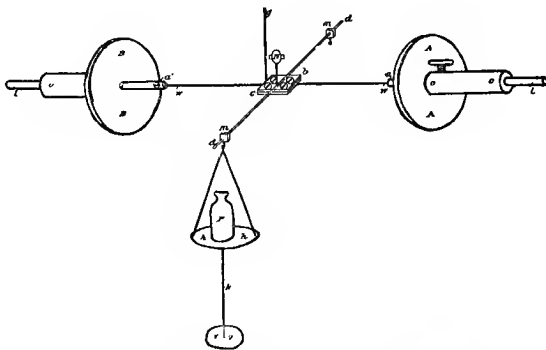


FIG. 18. — Torsion balance for absolute viscosity.

half wire. Let  $r$  be the radius of the wire,  $\eta$  its viscosity, and  $n$  its rigidity. Then it follows easily that

$$(15) \quad \eta = \frac{dP/da}{d\theta/dt} = \frac{PL}{\pi r^4 \dot{\phi}} = \frac{n\tau}{\dot{\phi}},$$

or for finite differences

$$(16) \quad \Delta \dot{\phi} = n\tau \Delta \frac{1}{\eta}.$$

Again, in case of the above bifilar,

$$(17) \quad \eta = \frac{2T}{\pi r^4 \dot{\phi}} \text{ and } \eta' = \frac{2T'}{\pi r'^4 \dot{\phi}'},$$

and since  $r = r'$ ,  $T = T'$ ,

$$(18) \quad \dot{\phi}' - \dot{\phi} = \frac{\eta - \eta'}{\eta} \dot{\phi}' = \frac{\eta - \eta'}{\eta'} \dot{\phi},$$

where  $\dot{\phi}' - \dot{\phi}$  may be called the differential fluidity of the wire.

Again, since  $\frac{\psi}{l} = \tau$ , the rate of twist applied, and  $T = \frac{\pi n r^4}{2} \frac{\psi}{l}$ ,

$$(19) \quad \dot{\phi}' - \dot{\phi} = \left( \frac{1}{\eta'} - \frac{1}{\eta} \right) n\tau.$$

In the above experiments  $\psi = \pi$ ,  $l = 30$  cm.,  $2\rho = .082$  cm. Hence

$$(20) \quad \dot{\phi}' - \dot{\phi} = 8.6 \times 10^{10} \left( \frac{1}{\eta'} - \frac{1}{\eta} \right),$$

and if  $\Delta$  refers to finite differences approximately,  $\Delta \frac{1}{\eta} = 10^{-11} \Delta \dot{\phi}$

is the difference of fluidity encountered. The results given by equation 15 are shown in Fig. 19 both for hard, *H*, and for soft, *S*, steel. Each wire was twisted two to three times in

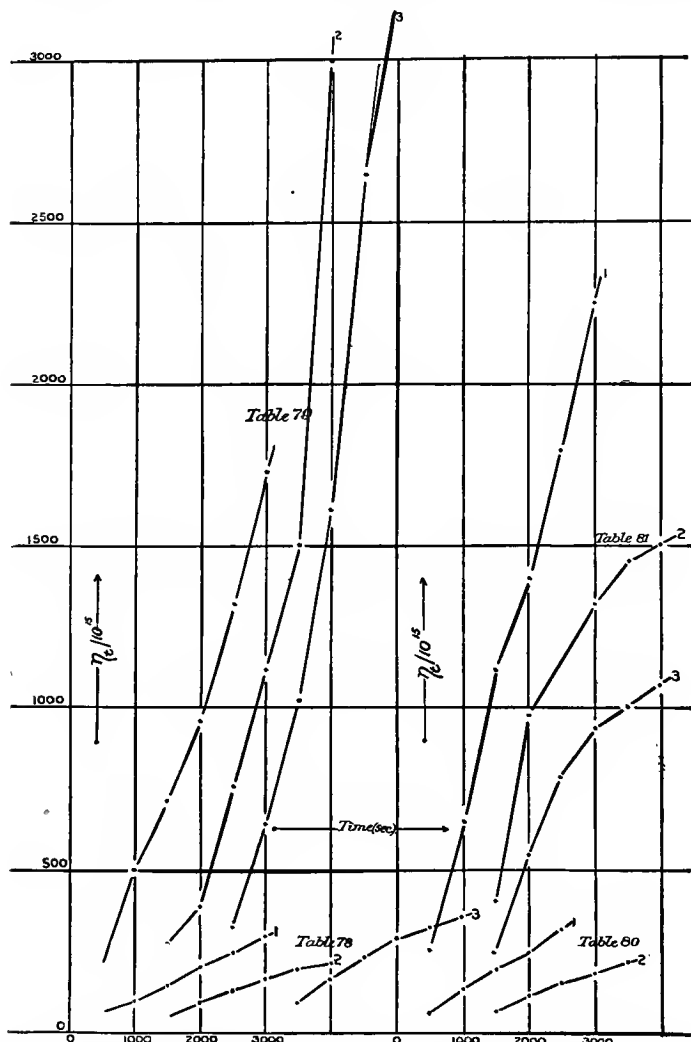


FIG. 19. — Absolute viscosity of steel in the lapse of seconds, for hard rods, *H*, and soft rods, *S*, and successive twists (1, 2, 3) in opposite directions.

opposite directions, and the corresponding curves are displaced an interval of 1000 sec., horizontally, for clearness. The results of Fig. 19 show that the viscosity of solids, unlike the viscosity of liquids and gases, is essentially a function of time,



increasing as time increases. Moreover, the rate of increase of solid viscosity,  $\dot{\eta}$ , and viscosity itself,  $\eta$ , increase together with the temper of steel. Thus far

Hard steel, after 500 sec.,  $\eta = 140 \times 10^{15}$ .  $\dot{\eta} = 194 \times 10^{12}$ .

Soft steel, after 500 sec.,  $\eta = 570 \times 10^{15}$ .  $\dot{\eta} = 1400 \times 10^{12}$ .

Hence an appropriate viscous constant for solids will probably be  $\dot{\eta}$ , the time rate at which  $\eta$  changes.

The curves of Fig. 19 show various irregularities; but these are due to instabilities introduced during manipulation, or by incidental interferences, like vibration, etc.

It is interesting to compare the absolute viscosities of the three states of aggregation, as is done in the following summary.

GASES, VAPORS		CRITICAL STATE	LIQUIDS	SOLIDS
H <sub>2</sub> ,	$9 \times 10^{-5}$	?	Ether, $10^{-8}$	Hard steel, $10^{17} - 10^{18}$
Air,	$1.7 \times 10^{-4}$		Water, $10^{-2}$	Soft steel, $6 \times 10^{17} - 10^{19}$
Ether vapor,	$7 \times 10^{-5}$		Glycerin, 5	
			Pitch, $2 \times 10^8$	
Limits:	$10^{-5} - ?$	? — ?	$10^{-8} - 10^{10}$	$10^{10} - 10^{19}$

Results on the absolute viscosity of solids were also obtained by comparing the viscous flow of thin wires of metal or other solid with the deformation, under otherwise like conditions, of thick columns of very viscous liquids, such as marine glue, etc. The data were of the same order of value as those found above.

In the further development of the subject, an attempt was made to determine the mutual dependence of viscosity,  $\eta$ , temperature,  $\theta$ , and pressure,  $p$ ; in other words, to work out the isometrics, the isothermals, and the isopiestic of a very viscous liquid like marine glue. Ranges of pressure as far as 2000 atmospheres were applied and the relations<sup>1</sup> worked out between  $13^\circ$  and  $23^\circ$ , and viscosities between  $10^8$  and  $1.5 \times 10^{10}$  (the viscosity of the body at  $0^\circ$  C. being about  $2.4 \times 10^{12}$ ), by forcing the material through suitable steel tubes (transpiration). The chart (Fig. 20) shows the isothermals,  $\theta$ , the isopiestic,  $p$ , and the isometrics,  $\eta$ , relatively to viscosity, the pressures being in hundreds of atmospheres (or in two hundreds of atmospheres of pressure excess, at one end of the tube as compared with

<sup>1</sup> Barus, *Am. Jour. of Sci.*, XLV, pp. 87-96, 1893.

the other), the temperatures in degrees Centigrade beginning with 10° C. (abscissas). The ordinates are viscosities in billions of absolute  $\left(\frac{c}{gs}\right)$  units. Temperatures along the ordinates also begin with 10° C. It appears that just as the viscosity of the body increases with enormous rapidity subject to fall of

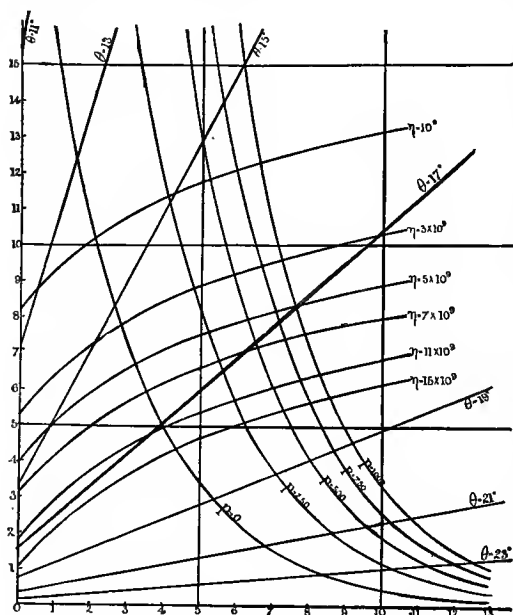


FIG. 20. — Isometrics,  $\eta$ , isothermals,  $\theta$ , isopiestic,  $p$  (atmosphere), of viscosity, for marine glue.

case of glass at 100°, where the resistance is enormous, and at 360°. The anode was sodium amalgam, and the cathode mercury between which the cylindrical shell of hot glass, subjected to stress, was interposed. Glass appeared to be a better conductor under torsion and traction, as intimated. In the latter case the decrement of resistance,  $R$ , was about  $dR/R = 3 \times 10^{-8}$ , per gram load, per square centimetre of section.

The viscosity of glass undergoing electrolysis could not be proved to differ from its viscosity in the absence of an electrolyzing current.

Another question of an allied character may be referred to here, relating to the energy potentialized in permanent changes

temperature, so its isothermal rate of increase with pressure also increases. But these results must be waived here, as being less closely allied with the subject of the present paper.

**13. Further Miscellaneous Experiments.** — If viscosity is dependent on molecular instability, it is conceivable that the electrolytic resistance of a solid will be changed by stress. I endeavored to test<sup>1</sup> this in the

<sup>1</sup> Barus, *Am. Jour. of Sci.*, XXXVII, pp. 339-351, 1889.

of configuration (permanent set). In the experiments made with different metals, it appeared<sup>1</sup> that about one-half the work done in stretching up to the limit of rupture may be stored up permanently. The work thermally dissipated varies in different metals, copper losing about 75 %, brass 60 %, iron 5 %. Such work is largely potentialized in the first, and largely dissipated in the final stages of stress. The total amount of energy stored up for a given kind of stress, per square centimetre of section, per centimetre of length, up to the limit of rupture, is a molecular constant of the metal. Thus in brass wire .16 cm. in diameter strained to the limit, 5 megalergs per centimetre, in copper wire, 1 megalerg per centimetre, and in iron wire (.14 cm. in diameter) 2 megalergs per centimetre, were permanently retained.

**14. Tempering at Atmospheric Temperature throughout Long-Range Time Intervals (Saecular).**— It follows from § 3, that if the time is sufficiently prolonged, appreciable softening of glass-hard steel must occur in the absence of a tempering bath, or appreciable rise of temperature. In other words, the hard metal is undergoing demonstrable chemical change at all times, spontaneously. It is interesting to call to mind Blondlot's belief in the occurrence of similar phenomena in metals generally, evidenced by the aid of his unfortunate *n*-rays. It does not appear, however, that the falling to pieces of configurations, even in steel, has any appreciable radiant effect. The electrical behavior of hard steel in the lapse of years is, however, quite without ambiguity, as observations<sup>2</sup> made within about 25 years, with 20 rods, very fully show. These observations are inserted in Fig. 1 above, for two different groups of rods (diameters .081 cm. and .044 cm. respectively), in a period of years and contrasted with the effect of elevated temperature for a period of minutes taken from Fig. 1, § 3. It is seen that in 24 years the effect of 100° acting for three hours has about been equalled. Hence the limiting states of hardness, which for the shorter time intervals (practical cases) characterize the different temperatures, *T*, at which tempering takes place, are not final. The ultimate limit, when exposure is prolonged through indefinite years, can only be the soft state, at

<sup>1</sup> Barus, *Am. Jour. of Sci.*, XXXVIII, pp. 193-198, 1889.

<sup>2</sup> Barus, *Phil. Mag.*, XXVI, pp. 397-403, 1888; *ibid.*, XLIV, pp. 486, 1897. Miss L. C. Brant, *Phys. Rev.*, XXIX, p. 494, 1909; Barus, *ibid.*, pp. 516-524.

all temperatures. It is merely approached more rapidly as the temperature,  $T$ , is higher. Thus the time,  $t_{330}$ , to reach the degree of blue softness ( $T=330^\circ$ ) from glass-hard would be (using an equation for interpolation presently to be stated)

at	$T=60^\circ$	$100^\circ$	$185^\circ$	$330^\circ$
	$t_{330}=.5\text{year}$	$.4\text{year}$	$.1\text{year}$	$1\text{min.}$

Clearly then the broad law of chemical reaction or decay, in solids, is implied in these curves, the nature of which is not easily made out. If we write for the decay per second,  $\dot{n}$ , of the number of hard configurations,  $n$ , in the two-phase system of § 12,

$$-\dot{n} = \alpha n, \text{ or } -\dot{n} = \alpha n^2, \text{ etc.,}$$

the resulting equations are quite insufficient to reproduce the above phenomenon of temper adequately. Empirically, if for brevity  $\frac{30}{T} = \tau$ , a double exponential of the form (subscripts 1 and 2 referring to hard and soft),

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_2} - \left( \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} \right) e^{-\alpha t},$$

expresses the change of specific electrical resistance in the lapse of time,  $t$ , for a temper given by  $\tau = \frac{30}{T}$ , the quantity  $\alpha$  being constant. The unbroken curves of Fig. 1 were so computed.

If time is given in minutes, the following values of  $\alpha$  apply :

$T=66^\circ$	$100^\circ$	$185^\circ$	$330^\circ$
$10^5 \times \frac{\alpha}{2 \cdot 3} = 123$	153	996	577

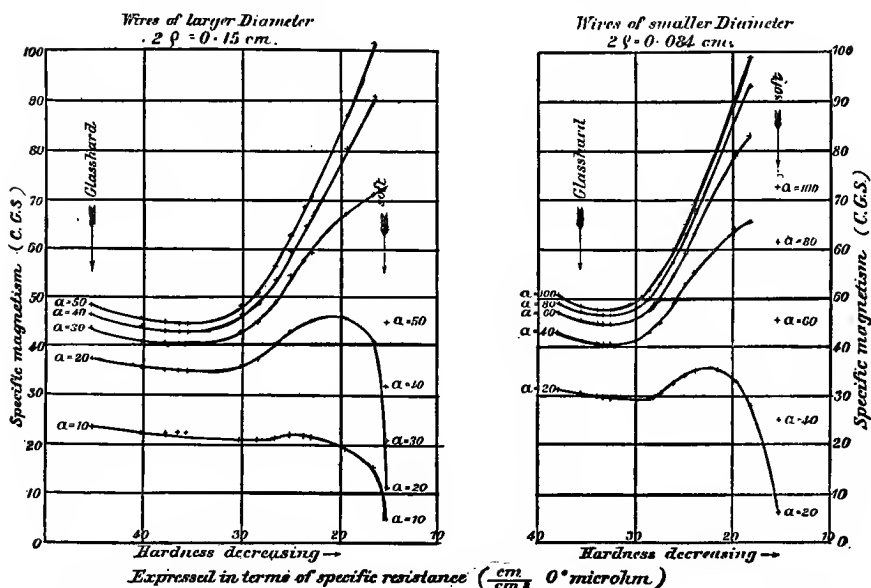
but the equation still shows outstanding discrepancies (see Fig. 1) at  $100^\circ$  and  $330^\circ$ , which merely signifies that the true law of decay is yet to be found. Much depends on the degree to which the initial hard rod is under-tempered. The law of decay implied in the equation would be

$$n = n_0 e^{-\alpha t},$$

from which  $n$  may be found; but the result is not suggestive. Neither does it adequately reproduce the data given for saecular softening in the above curve. It follows that results,

such as the present, are particularly adapted to rigorously test any law of decay which may hereafter be proposed.

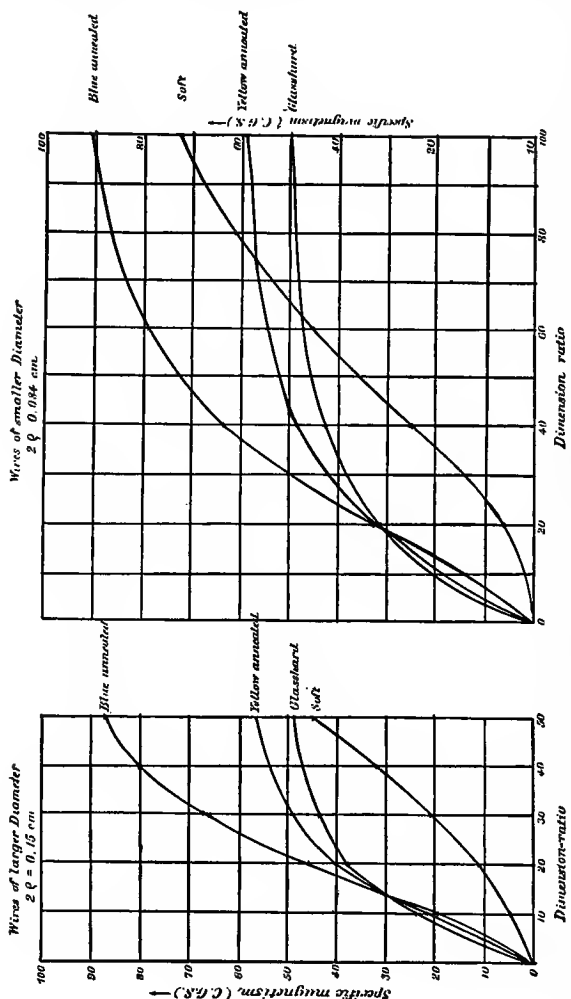
**15. Permanent Magnetization of Saturated Steel Magnets as depending on Temper and Shape.**—The magnets with which the following experiments were made were all broken from the same homogeneous glass-hard wire (diameter .15 cm.). The states of hardness to which they were tempered are expressed by their specific resistances,  $s_0$ . The important variable show-



FIGS. 21-22. — Permanent magnetic moment per gram (specific magnetism,  $I/\rho$ .) of saturated tempered steel rods (abscissas, electric hardness,  $s_0$ ) for different ratios of length to diameter,  $\alpha$ .

ing their shape is adequately given by the ratio of axes longitudinal and transverse,  $\alpha$ . The curves of Figs. 21 and 22 are then a complete exhibit of the dependence of magnetic intensity, here given by the magnetic moment *per gram*, of the saturated permanent magnets, in terms of their tempers (abscissas) and their shape (parameter,  $\alpha$ ). In Figs. 23 and 24 the shape is made the abscissa, temper being the parameter, "yellow annealed" and "blue annealed" corresponding to  $T = 185^\circ$  and  $T = 330^\circ$ . These curves, particularly Figs. 21 and 22, bring out three characteristic features: (1) As hardness decreases from glass-hard to an intermediate temper, the magnetic

intensity passes through a flat minimum, for all shapes from  $\alpha = 10$  to  $\alpha = 100$ . (2) The further decrease of hardness, from mean temper to soft, is accompanied by a passage of magnetic intensity of permanent magnetization through a max-



FIGS. 23-24. — The same for selected states of temper, glass-hard, "yellow annealed" ( $185^{\circ}$ ), "blue annealed" ( $330^{\circ}$ ), soft (annealed at red heat).

imum, which is flat in short rods, but enormously developed in slender or linear shapes. Thus a considerable degree of importance attaches to the unexplored states of temper, or degrees of hardness between tempered at  $400^{\circ}$  and tempered at  $1000^{\circ}$ . It is here that one passes through the unique phenomenon referred

to in § 2. (3) The unique maximum of permanent magnetic intensity will therefore be exhibited by a steel rod whose shape is linear,  $\alpha > 100$ , and whose temper lies somewhere between the states  $T = 400^\circ$  and  $T = 1000^\circ$ , *i.e.*, in the second stage of temper. The maximum of permanent intensity, incidentally obtained in these experiments, was about 800 cgs. units of magnetization per cubic centimetre; but no attempt was made to enhance this value.

Figs. 23 and 24 admit of the same interpretation.

**16. Magnetic Retentiveness,<sup>1</sup> Ageing.**—The decay of magnetization on long exposure to temperature takes place in accordance with the law, involving temperature,  $T$ , and time,  $t$ , similar to the case of temper. But the decay is more rapid and the equation probably essentially simpler.

If a hard steel magnet is subjected to a tempering bath,  $T$ , it is necessary to distinguish carefully between :

(1) The direct effect, which is purely magnetic and due to the breakdown of mere magnetic configurations, on exposure to  $T$  and  $t$ .

(2) The indirect effect, which is due to the breakdown of the hard molecular configurations of the glass-hard rod, on exposure to  $T$  and  $t$ .

The latter is naturally much larger, as it includes the former. Its law of variation must conform very closely to the decay of temper. Thus, for instance, the original loss of permanent magnetism of a glass-hard rod on prolonged exposure to  $100^\circ$  was  $\frac{62.6 - 43.8}{62.6} = 30\%$ . This is the indirect effect. Temper is

decaying as well as magnetization. The same rod remagnetized to saturation, after temperature had reached the limit just specified, on prolonged exposure to  $100^\circ$ , now showed a loss of permanent magnetization  $\frac{59.0 - 55.9}{59.0} = 53\%$ . This is the direct or purely magnetic effect, due to the exposure, and is not complicated by the concomitant loss of temper.

Figures 25 and 26 present the same case with more detail. In the former case two identical glass-hard rods, No. 11 and No. 12, were exposed to  $100^\circ$  for successive prolonged intervals of time, as shown (10 minutes at first to 360 minutes eventually). The temper is measured by the electrical resist-

<sup>1</sup> Strouhal and Barus, *Ann. der Physik*, XX, pp. 662-684, 1883.

ance,  $s_0$ , given by the abscissas. No. 11 was not subsequently remagnetized, while No. 12 was so treated after each exposure. Both decay in temper; but No. 12 eventually reaches a steady state in which the decay of magnetization in 360 minutes (or in any time) is less than the initial decay in 10 minutes,

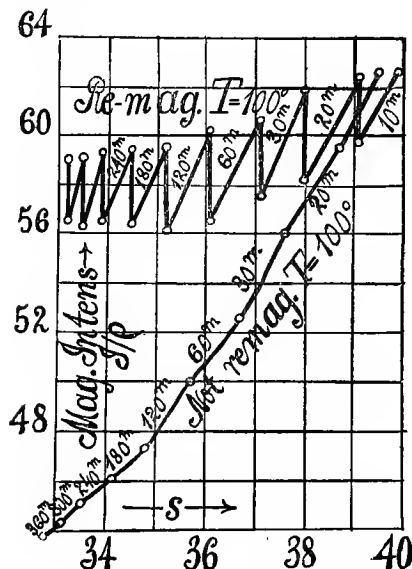


FIG. 25.—Hard steel rods, successively annealed with (No. 12) and without (No. 11) remagnetization, showing permanent magnetic moment per gram and electric hardness,  $s$ .

whereas in No. 11, as it grows softer, the continued decay of magnetization is enormous.

Figure 26 presents the same case, in a way even more striking, the magnetic intensity of the same rod being shown in the lapse of hours,  $t$ , of exposure to  $T = 100^\circ$ , before (lower curve) and after (upper curve) the limiting hardness corresponding to  $100^\circ$  has been reached. The same figure also shows the decay of temper ( $s_0$ ) in the lapse of time. These two curves (temper and time, magnetization and time) must be of the same character, and they happen to nearly coincide, while

changes of hardness are still incident to the exposure. The (upper) magnetization curve, however, after variation of temper has been virtually wiped out, is quite different. The limit is soon reached and maintained indefinitely.

The following fundamental rules for the ageing of magnets which are to be used in instruments of precision are therefore suggested by these experiments.

1. Glass-hard rods should never be employed as instrumental magnets.

2. These glass-hard rods should be tempered at  $100^\circ$ , for a period of at least 20 to 30 hours, *i. e.*, until the practical limit of hardness corresponding to  $100^\circ$  is reached.

3. The rods so tempered should now be magnetized to



saturation, and then again exposed at  $100^\circ$  for a period of at least 5 hours.

Such magnets will be found to possess the maximum of retentiveness attainable. Being still quite hard, they are not subject to loss by percussion or by vibration, etc., and they are certainly independent of variations of temperature, so far as any permanent loss is concerned. Their magnetization, in view of the flat minimum, is about as large as in the glass-hard state.

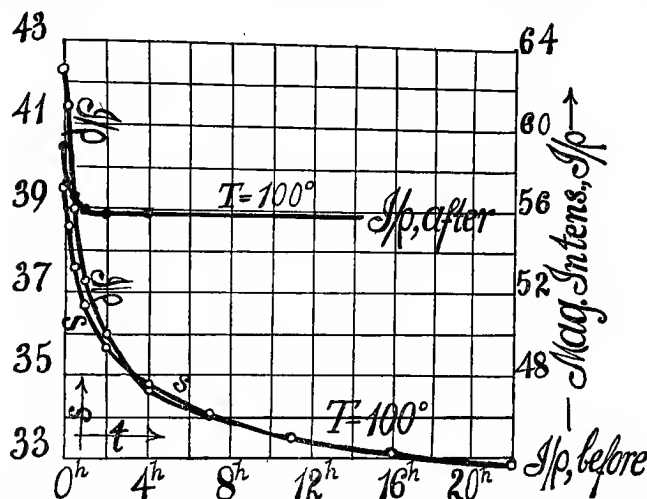


FIG. 26.—Decay of resistance and of permanent magnetic intensity per gram of a saturated hard rod, exposed to  $100^\circ$ , for a lapse of hours (lower curve). Decay of permanent magnetism per gram, of saturated rod, after tempering to the limit at  $100^\circ$  (upper curve).

Similar rules may be carried out for higher temperatures of tempering; larger magnetization will then be secured, but the resistance to shocks will have deteriorated.

It is particularly noteworthy (as has been already pointed out) that the (magnetic) configuration, which is placed and directed by a magnetic field, lies quite within the chemical configuration (temper), which is controlled by a thermodynamic interference. Change of the former, which has its own specific freedom, does not therefore influence the latter; but the converse is obviously not true.

**17. Elastic Hysteresis.**—On comparing two elastic pressure gauges with each other, through long-pressure ranges (1000 atm.) cyclically, the march of results<sup>1</sup> for the pressure-increas-

<sup>1</sup> Barus, *Phil. Mag.*, XXX, pp. 344 *et seq.*, 1890; *ibid.*, XXXI, pp. 400–406, 1891.

ing and the pressure-decreasing phases of the comparison do not quite coincide. The data usually lie on bow-shaped cycles, and the discrepancy between the two curves may be equivalent to 100 atm. Thus in Fig. 27 a powerful Bourdon gauge is compared with a Tait gauge (as I have called it), in which pressure is measured by the expansion of a steel tube, isother-

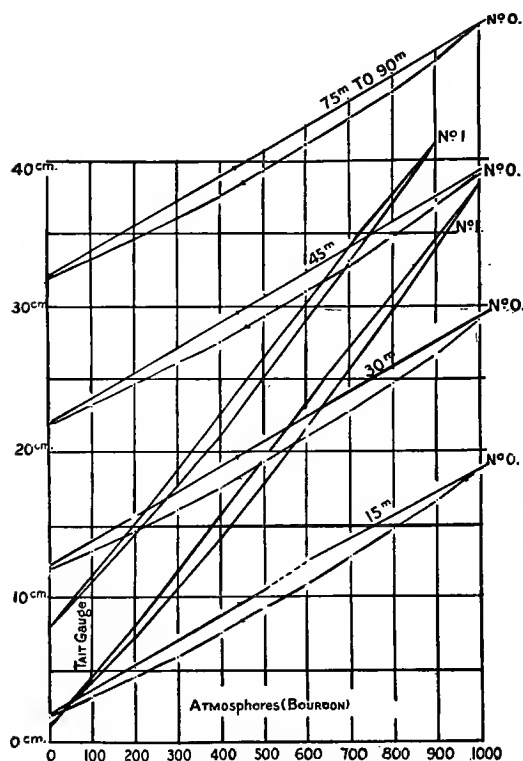


FIG. 27. — Elastic hysteresis in the relative readings of Bourdon and Tait gauges, subject to cyclic variations of high pressure within.

each gauge was separately compared with an Amagat manomètre à pistons libres, with similar results. The discrepancy in question must therefore be reckoned within the use of elastic high-pressure gauges. Here, however, it is the occurrence of elastic hysteresis, as an analogue of the magnetic phenomenon, to which I wish especially to advert.

**18. Thermo-electric Effect of Magnetization.**<sup>1</sup> — The effect of magnetization on the specific resistance of iron has been care-

<sup>1</sup> Strouhal and Barus, *Ann. der Physik*, XIV, pp. 54-61, 1881.

mally, both gauges carrying high pressures within. The arrows show the march of pressure from 0 atm. to 1000 atm., and return. The cycles were made at the times given in minutes on the curves, and two Tait gauges, No. 0 and No. 1, were tested. In further experiments all multiplying gear was excluded from the Bourdon, and measurements made by a Fraunhofer micrometer showing the displacement of the end of the Bourdon tube due to pressure. Finally

fully studied (Auerbach). It is sufficiently small not to conflict with the above expression for temper. The question remains, as to the value of the corresponding thermo-electric effect due to magnetization in comparison with thermo-electric hardness. Experiments showed that a strong magnetic field produced in iron a change of thermo-electric power of about .35 microvolt per degree Centigrade at 0° C. This is less than .3 % of the thermo-electric distance between hard steel and soft steel, and is therefore negligible. Theoretically, this magnetic effect is of interest. It has the same sign as the effect of a temporary tensile strain in iron, and may be, in part, due to it, owing to the occurrence of magneto-striction.























